Решения и методические рекомендации по проверке

27 апреля 2021 г. Олимпиада 3 класс. Длительность – 70 минут. Заданий – 10.

1. Выполните действия:

12 + 17 + 39 + 456 + 88 + 44 + 1083 + 261 + 21.

Укажите самый простой порядок выполнения действий.

Ответ: (12 + 88) + (17 + 1083) + (39 + 261) + (456 + 44) + 21 = 2021 (порядок действий может быть и другой).

2. В списке участников олимпиады “Уникум” для третьего класса до Вани Иванова 288 школьника, а после него 180. Сколько всего было участников олимпиады “Уникум” для третьего класса?

Решение. 288 + 180 + 1 = 469 школьников – всего.

Ответ: 469 школьников.

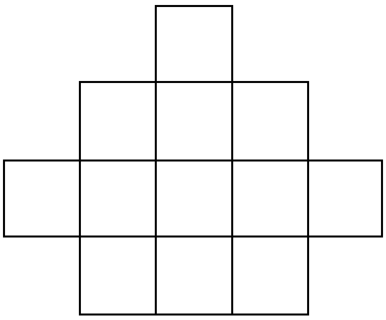
3. Герои мультфильмов про Простоквашино кот Матроскин и пёс Шарик поливали огород. Кот Матроскин использовал для полива 8 вёдер воды, а Шарик на 4 ведра больше. Сколько всего вёдер воды использовали для полива кот Матроскин и пёс Шарик?

Решение. 1. 8 + 4 = 12 вёдер – использовал Шарик.

3. 8 + 12 = 20 вёдер – всего было использовано.

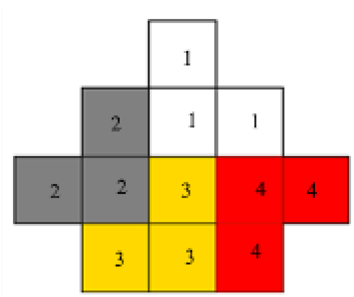
Ответ: 20 вёдер.

Комментарий. Задачу можно решить выражением.



4. Разделите фигуру, изображенную на рисунке, на четыре одинаковые части так, чтобы линия разрезов шла по сторонам клеток.

Решение.



5. В детском саду гуляют на улице мальчики и девочки. Каждый мальчик гуляет с ведерком, а каждая девочка – с лопаткой. Ведерок на три меньше, чем лопаток. С прогулки дети возвращались так: каждый мальчик взял за руки двух девочек, и все пошли в группу. Какое наименьшее число детей могло быть в этой группе?

Решение. Попробуем определить наименьшее количество мальчиков, а значит и общее число детей.

1. Если мальчик 1, то девочек 4 (так как их на 3 больше), в этом случае не получаются тройки 1 мальчик и 2 девочки.

2. Если мальчиков 2, то девочек 5, тоже не получается.

3. Если мальчиков 3, то девочек 6. Получается, что каждый мальчик возьмет за руки 2 девочек (мальчиков в два раза меньше девочек).

Тогда всего 3 + 6 = 9 детей.

Ответ: 9 детей.

6. У Бильбо есть участок поля размером 5 x 5 ярдов. Так вышло, что квадраты 1 x 1 в каждом из углов поля он засадил морковью. На оставшейся части ему нужно выделить одну квадратную (обязательно) область и засадить ее брюквой. Участок какой наибольшей площади Бильбо сможет выделить под квадратный участок брюквы?

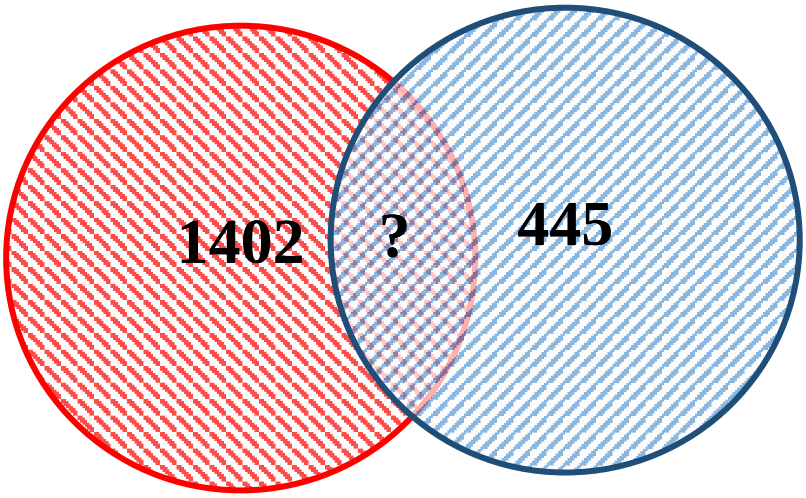
Решение. Искомый участок имеет размер 3 x 3.

$3 \cdot 3 = 9$ квадратных ярдов – площадь участка под брюкву.

Ответ: 9 квадратных ярдов.

Комментарий. Ошибки в указании единиц измерения площади не наказываются.

7. В некоторый учебный год в Липецкой области всего было 1600 школьников, каждый из которых принимал участие хотя бы в одной открытой олимпиаде “Уникум” или “Супербит” (финальный этап). В олимпиаде “Уникум” принимало участие 1402 школьника, а в олимпиаде “Супербит” – 445 школьников. Сколько школьников участвовали сразу в двух олимпиадах “Уникум” и “Супербит”?



Решение. Нарисуем круги Эйлера. Сложим числа в обоих кругах. При этом школьники, находящиеся в их пересечении (то есть и в первом, и во втором), будут посчитаны дважды, то есть лишний раз, поэтому от суммы количества участников каждой олимпиады в отдельности нужно вычесть общее число участников:

1402 + 445 – 1600 = 247. **Ответ: 247.**

8. Торин Дубощит и его четыре товарища делят сокровища, найденные у подножия Одинокой горы – проблема, что всего они нашли три одинаковых алмаза. Их Торин отдает Кили, Вили и Фили. За это каждый из них отдает 200 дукатов, которые оставшиеся два гнома делят между собой. Вопрос – сколько стоит один алмаз, если гномы – исключительно честный и справедливый народ и все делит поровну?

Решение. 1. 3 · 200 = 600 дукатов – оставшиеся два гнома делят между собой.

2. 600 : 2 = 300 дукатов – получит каждый из пятерых.

3. 5 · 300 = 1 500 дукатов – общая стоимость алмазов.

4. 1 500 : 3 = 500 дукатов – стоимость одного алмаза.

Ответ: 500 дукатов.

Комментарий. Возможно выполнение части действий выражением.

9. Герои мультфильмов про Простоквашино Кот Матроскин и пёс Шарик любят пить чай с молоком. Молоко у них своё, а чай они покупают. Причём каждый пьёт только свой чай. Как-то они купили одинаковые коробки чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика им хватает на две или три чашки. Купленной коробки коту Матроскину хватило на 51 чашку чая, а Шарику – на 73. Сколько пакетиков чая было в одной коробке чая?

Решение. Заметим, что в коробке не могло быть меньше 25 пакетиков: если их будет хотя бы 24, то Шарик не сможет выпить больше 72 чашек, а он выпил 73. С другой стороны, в коробке не может быть больше 25 пакетиков: если их хотя бы 26, то кот Матроскин не мог выпить меньше 52 чашек, а он выпил 51. Тем самым, в коробке было ровно 25 пакетиков чая. Шарик заварил 23 пакетика по три раза, а два пакетика по два раза, а кот Матроскин заварил 1 пакетик три раза и 24 пакетика дважды.

Ответ: 25 пакетиков.

10. Очнувшись после ночной погони, Буратино понял, что оказался в гостях у прекрасной Мальвины. Девочка с голубыми волосами очень любила обучать своих гостей всяческим премудростям, в особенности нравилась ей математика. Проследовав к парте, Буратино увидел на доске странное сочетание слов:

$$\begin{array}{r} +\,\text{ЕДА} \\ \text{ЕДА} \\ \hline \text{БОБ} \end{array}.$$

"Что за странное послание?" – поинтересовался наш герой. "Ничего особенного, обычный числовой ребус." – ответила Мальвина, – "Необходимо выяснить, что за цифры спрятаны за каждой буквой. Но дам тебе одну подсказку – под буквой «О» скрывается цифра 9". Помогите Буратино справиться с заданием Мальвины. Найдите все возможные варианты. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, различные буквы – различные цифры.

Решение. Под буквой «О» скрыта цифра 9, следовательно, за буквой «Д» находится цифра 4, а сумма двух букв «А» даёт переход через десяток:

$$\begin{array}{r} +\,\text{Е4А} \\ \text{Е4А} \\ \hline \text{Б9Б} \end{array}$$

Под буквой «А» должна быть спрятана цифра, которая при увеличении в два раза даёт число большее 10. «А» может равняться: 5, 6 или 8 (цифра 7 не может быть, так как она в сумме с собой даёт 14, а цифра 4 уже задействована, так же, как и 9).

1 случай. А = 5:

$$\begin{array}{r} +\,\text{Е45} \\ \text{Е45} \\ \hline \text{Б9Б} \end{array}.$$

Значит, Б = 0, но этого не может быть, так как в начале числа 0 стоять не может.

2 случай. Если А = 6, то: $\begin{array}{r} +\,\text{Е46} \\ \text{Е46} \\ \hline \text{Б9Б} \end{array}.$

Тогда Б = 2: $\begin{array}{r} +\,\text{Е46} \\ \text{Е46} \\ \hline 292 \end{array}.$

В таком случае, за буквой «Е» скрывается цифра 1: $\begin{array}{r} +\,146 \\ 146 \\ \hline 292 \end{array}.$

3 случай. Проверим случай, когда А = 8: $\begin{array}{r} +\,\text{Е48} \\ \text{Е48} \\ \hline \text{Б9Б} \end{array}.$

Получаем, что Б = 6: $\begin{array}{r} +\,\text{Е48} \\ \text{Е48} \\ \hline 696 \end{array}.$

Е = 3: $\begin{array}{r} +\,348 \\ 348 \\ \hline 696 \end{array}.$

Получены два варианта.

Ответ: 146 + 146 = 292; 348 + 348 = 696.

Решения и методические рекомендации по проверке

28 апреля 2021 г. Олимпиада 4 класс. Длительность – 70 минут. Заданий – 10.

1. Выполните действия: 125 · 25 · 8 · 2021 · 40. Укажите самый простой порядок выполнения действий.

Решение. 125 · 25 · 8 · 2021 · 40 = (125 · 8) · (40 · 25) · 2021 = 2 021 000 000.

Ответ: 2 021 000 000.

2. В пяти одинаковых банках 8 кг меда. Сколько килограммов меда в 10 таких банках?

Решение. (10 : 5) · 8 = 16 кг.

Ответ: 16 кг.

3. Шерлок Холмс и доктор Ватсон на досуге решили по очереди заполнять поля шахматной доски фигурами (считаем, что фигур достаточно для заполнения всех полей), причем нельзя на одно и то же поле ставить две фигуры. Проигравшим считается тот игрок, которому некуда поставить фигуру. К удивлению Ватсона, Холмс всегда одерживал верх. Как ему это удавалось? Каким по счету были его ходы? Шахматная доска имеет размеры 8 х 8.

Решение. Шерлок Холмс всегда ходил вторым. Так как шахматная доска имеет размеры 8 х 8, то всего на ней 64 ячейки. Если Ватсон делает ход – Шерлок отвечает ему, ставя фигуру произвольно. Тогда каждый нечётный ход остаётся за Ватсоном, а чётный (в том числе 64) – за Шерлоком. В результате у Ватсона не остаётся места для хода.

Ответ: ходы Шерлока Холмса были вторыми.

4. Матвей, Тимофей, Ваня и Даня пошли на пикник. Каждому мальчику его бабушка дала с собой пирожки. Каждые пять минут каждый мальчик съедал по одному пирожку. В начале пикника у Матвея и Тимофея вместе было столько же пирожков, сколько у Вани и Дани. Могло ли в конце пикника у всех вместе остаться 9 пирожков?

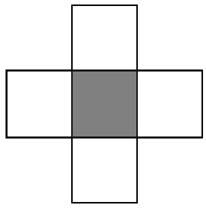
Решение. Каждые 5 минут дети съедали чётное число пирожков. В итоге пирожков стало нечётное число, значит и первоначально их было нечётное число.

В начале пикника у Матвея и Тимофея вместе было столько же пирожков, сколько у Вани и Дани, следовательно, общее число пирожков должно быть чётно. Получили противоречие.

Поэтому к концу пикника может остаться только четное число пирожков.

Ответ: нет, не могло.

5. На рисунке дана клетчатая фигура. Периметр закрашенного квадрата равен 10. Найдите периметр всей фигуры. Периметр фигуры – это сумма длин всех её сторон (в данном случае внешних отрезков).



Решение. Периметр фигуры состоит из 12 отрезков – сторон квадратов, значит он в три раза больше, чем периметр центрального квадрата.

$12 : 4 \cdot 10 = 30$.

Ответ: 30.

6. На доске нарисован отрезок *AB* длиной 4040 мм. На прямой *AB* отмечены две точки *C* и *D*, так что, *CA* = *CB* = 2020 мм, *DA* = 1 мм, *DB* = 4041 мм. Чему равно расстояние между точками *C* и *D*?

Решение. Поскольку $CA + CB = AB$, то точка C лежит на отрезке AB, в его середине. Аналогично, $DA + AB = DB$, значит, точка A лежит на отрезке DB. Итак, четыре точки D, A, C, B лежат на одной прямой именно в таком порядке. Следовательно, расстояние между точками C и D равно $DA + AC = 2021$ мм.

Ответ: 2021 мм.

7. Для поездки на экскурсию заказали автобус с 22 сидячими местами, все сиденья сгруппированы попарно. На экскурсию едет 12 учеников 4 “Б” класса и 10 учеников 4 “Г” класса. Всегда ли найдётся пара соседних сидений, на которых едут двое учащихся одного класса?

Решение. Определим, сколько пар сидений в автобусе $22 : 2 = 11$. Так как пар 11, а учеников 4 “Б” класса 12, то, как минимум, в одной из пар обязательно окажутся два одноклассника.

Ответ: да, всегда.

8. Какое наименьшее число, большее 2021, имеет ту же сумму цифр, что и 2021, но отличается от него произведением цифр?

Решение. Сумма цифр данного числа $2 + 0 + 2 + 1 = 5$. Произведение искомого числа не может быть равно 0, значит, искомое число не содержит 0. Наименьшее будет иметь вид 2 * * *, где сумма цифр, замененных звездочками, равна 3. Получаем число 2111.

Ответ: 2111.

9. Идет третья эпоха битвы за кольцо. Наступает решающий час Средиземья. Все зависит от судьбы пятерых спутников: человек, эльф, гном и двое хоббитов. Они пришли в замешательство в связи с тем, что натолкнулись на непроходимую заводь с отравленной водой. Однако судьба в этот раз была к ним благосклонна и спустя какое-то время они увидели плот, прибившийся к краю берега неподалеку от них. К сожалению, плот оказался небольшим и может перевезти или одного эльфа, или одного человека, или одного гнома, или двух хоббитов. Найдите способ перевезти всех героев на другую сторону, чтобы спасти Средиземье!!!

Решение. Сначала два хоббита переплывают на другой берег, дальше один возвращается. Потом один (человек/гном/эльф) переплывает, а второй хоббит возвращается, берет первого хоббита, и они переплывают на другую сторону. Первый хоббит возвращается и переплывает второй (человек/гном/эльф), потом второй хоббит возвращается за первым, и они плывут на другую сторону. Первый хоббит возвращается и переплывает третий (человек/гном/эльф), потом второй хоббит возвращается за первым, и они плывут на другую сторону. Все на другой стороне.

10. Между городами *A* и *B* ровно 2021 километр. На каждом километре дороги между городами *A* и *B* стоит столб с табличкой, на одной стороне которой указано, сколько километров до города *A*, а на другой – до города *B*. У скольких табличек числа составлены только из двух различных цифр (учитываются обе стороны таблички)?

Решение. Сумма двух чисел на каждой из табличек равна 2021. Следовательно, одно из чисел чётно, а другое нечётно. Поэтому, одна из цифр должна быть чётна, а вторая нечётна.

Случай 1. Предположим, что 1 нет среди цифр на искомом указателе. Тогда, для получения в сумме 2021, одно из чисел должно начинаться с 2, а вторая цифра этого числа 0. По указанному выше обе цифры чётными не могут быть.

Случай 2. Предположим, что 1 – одна из цифр на искомом указателе. Тогда последними цифрами с противоположных сторон таблички могут быть только 1 и 0. Перебрав варианты получим, что подходят только пары чисел: 1011 и 1010 или 1010 и 1011.

Ответ: 2.

Решения и методические рекомендации по проверке

29 апреля 2021 г. Олимпиада. 5 класс. Длительность – 80 минут. Заданий – 10.

1. Восстановите пример 1*28 + 993 = 2 02*. Вместо знака звездочки может стоять любая цифра. Укажите все возможные варианты.

Ответ: 1 028 + 993 = 2 021.

2. Какова последняя цифра значения выражения

$$\mathbf{2017 \cdot 2019 \cdot 2021 - 2018 \cdot 2020?}$$

Решение. На последнюю цифру произведения влияют только последние цифры множителей. Следовательно, произведение $2017 \cdot 2019 \cdot 2021$ оканчивается цифрой 3, так как $7 \cdot 9 \cdot 1 = 63$. Произведение $2018 \cdot 2020$ оканчивается нулем. Тогда разность $2017 \cdot 2019 \cdot 2021 - 2018 \cdot 2020$ оканчивается на 3.

Ответ: 3.

3. Найдите сумму трёх чисел, если первое число $28\frac{3}{20}$ и оно меньше второго на $8\frac{2}{5}$, а третье число больше второго на $3\frac{1}{4}$.

Решение. 1. $28\frac{3}{20} + 8\frac{2}{5} = 28\frac{3}{20} + 8\frac{8}{20} = 36\frac{11}{20}$ – второе число.

2. $36\frac{11}{20} + 3\frac{1}{4} = 36\frac{11}{20} + 3\frac{5}{20} = 39\frac{16}{20}$ – третье число.

3. $28\frac{3}{20} + 36\frac{11}{20} + 39\frac{16}{20} = 103 + \frac{30}{20} = 104{,}5$ – сумма трёх чисел.

Ответ: 104,5.

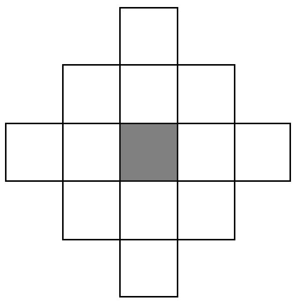
Комментарий. За запись ответа в виде, допускающем упрощение, баллы не снимаются. Задачу можно решить выражением.

4. Уникум составлял из цифр 4, 5, 7 и 9 четырехзначные числа, все цифры в которых различны, и выписал все их в порядке возрастания. Какое число он написал предпоследним?

Решение. Больше будут те числа, у которых первые цифры больше. Последнее число – наибольшее из возможных – это 9754. Тогда перед ним – 9745.

Ответ: 9745.

5. На рисунке дана клетчатая фигура, клетки имеют равные размеры. Периметр закрашенного квадрата равен 10. Найдите периметр всей фигуры. Периметр фигуры – это сумма длин всех её сторон (в данном случае внешних отрезков).



Решение. Периметр фигуры состоит из 20 отрезков – сторон квадратов, значит он в 5 раза больше, чем периметр центрального квадрата.

$20 : 4 \cdot 10 = 50$ – периметр данной фигуры.

Ответ: 50.

6. Гендальф везет на день рождения Бильбо пять корзин с фейерверками. Известно, что в любых трёх корзинах не более 50 фейерверков, а в каждой корзине содержалось не менее пяти фейерверков. Какое наибольшее число их может быть в одной из корзин, в которой – самые яркие и интересные заряды? Дайте ответ и поясните, почему это наибольшее значение.

Решение. 1. 5 + 5 =10 фейерверков – наименьшее количество фейерверков в двух корзинах.

2. 50 – 10 = 40 фейерверков – наибольшее количество фейерверков в одной корзине.

Ответ: 40 фейерверков.

7. Уникум написал число 2021 и отразил его зеркально. Получил восьмизначное число 20211202. Сколько еще зеркальных чисел он может получить из всех цифр этого восьмизначного числа?

Решение. Рассмотрим сколько чисел можно получить, переставляя цифры числа 2021, вторая часть числа получается зеркально. Всего цифр 4, но на первое место нельзя поставить 0, значит вариантов перестановок $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$, но две из них одинаковые (из-за наличия двух цифр 2), значит, их в два раза меньше, то есть 9.

Ответ: 8.

Комментарий. За ответ “9” снижение на 1 балл.

8. Будет ли сумма 1 + 2 + 3 + … + 2019 + 2020 + 2021 делиться на 2021?

Решение. Сгруппируем слагаемые следующим образом: (1 + 2020) + (2 + 2019) + (3 + 2018) + … + 2021. Так как каждое слагаемое делится на 2021, то и вся сумма будет кратна 2021.

Ответ: да, будет.

9. Однажды, на одном из уроков, Буратино сунул свой длинный нос в чернила и поставил на тетрадь две большие кляксы. За это Мальвина посадила его в чулан, подумать над своим поведением, сказав, что выбраться оттуда он сможет, только решив числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{КОРКА} \\ +\ \text{КОРКА} \\ \underline{\text{КОРКА}} \\ \text{ДОЛЬКА} \end{array}.$$

Помоги нашему герою выполнить предложенное задание. Необходимо определить какие цифры скрываются за какими буквами. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, различные буквы – различные цифры. Найдите все возможные варианты, с учётом того, что за буквой “Л” спрятана цифра “2”.

Решение. В данном ребусе в качестве последних двух цифр одинаковые буквы, значит это или цифра 0, или 5 (переход через десяток не работает из-за изменения чётности). Вариант, когда «К» – это 0, а «А» – это 5 нам не подходит, так как «К» стоит еще и первой, а ноль не может стоять в числе первым. Подставим, наоборот, «К» – это 5, а «А» – это 0, в этом случае также получается, что Д = 1:

$$\begin{array}{r} \text{5О}\text{Р50} \\ +\ \text{5ОР50} \\ \underline{\text{5ОР50}} \\ \text{1ОЛЬ50} \end{array}.$$

Буква «О» равна 5, 6 или 7. Но, так как цифра 5 уже есть, следовательно, О = 6 или О = 7:

$$\begin{array}{r} \text{56Р50} \\ +\ \text{56Р50} \\ \underline{\text{56Р50}} \\ \text{16ЛЬ50} \end{array}, \qquad \begin{array}{r} \text{57Р50} \\ +\ \text{57Р50} \\ \underline{\text{57Р50}} \\ \text{17ЛЬ50} \end{array}.$$

«Л» равной двум можно получить только во втором случае:

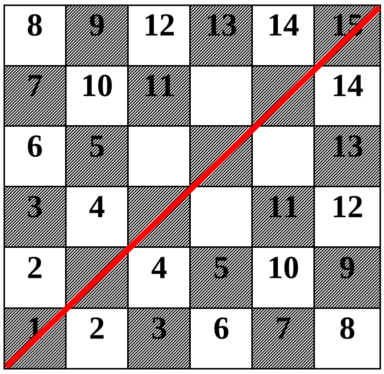
$$\begin{array}{r} \text{57Р50} \\ +\ \text{57Р50} \\ \underline{\text{57Р50}} \\ \text{172Ь50} \end{array}.$$

Возможны два варианта значений буквы «Р», удовлетворяющие условию задачи: Р = 4 и, соответственно, Ь = 3 или Р = 6 и, соответственно, Ь = 9:

$$\begin{array}{r} 57450 \\ +\ 57450 \\ \underline{57450} \\ 172350 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 57650 \\ +\ 57650 \\ \underline{57650} \\ 172950 \end{array}.$$

Ответ: 57 450 + 57 450 + 57 450 = 172 350 или 57 650 + 57 650 + 57 650 = 172 950.

10. По доске 6 х 6 ячеек из одного углового квадрата выползают две улитки. Каждую минуту они переползают на соседнюю по стороне клетку, причем в каждый момент времени их положение симметрично относительно одной и той же диагонали. В конце пути улитки второй раз оказываются в одной ячейке. Какое минимальное число клеток могли не посетить улитки (ни одна)? Улитка не может посещать клетку в которой она уже была.



Решение. На диагонали, симметрично которой перемещаются улитки, они могут посетить только две ячейки. Таким образом, четыре ячейки уже нельзя посетить.

Покрасим доску в шахматном порядке, указанным на рисунке способом. Очевидно, что при переходе на соседнюю клетку цвет меняется, и использованных черных на одну больше, чем белых (так путь начинается и заканчивается чёрной клеткой). Если рассматриваемая диагональ чёрного цвета, то вне этой диагонали 9 белых и 6 чёрных клеток с каждой стороны.

Так первая и последняя недиагональные клетки, которые посетит улитка, белые, то пройденных белых клеток с каждой стороны от диагонали должно быть на две меньше, чем чёрных.

То есть 4 диагональных чёрных и $2 \cdot 2 = 4$ белых недиагональных клеток посетить нельзя.

Оценка $4 + 4 = 8$. Пример на рисунке.

Ответ: 8.

Решения и методические рекомендации по проверке

30 апреля 2021 г. Олимпиада. 6 класс. Длительность – 80 минут. Заданий – 10.

1. Решите уравнение

$$2x + 541 + 542 = 1541 + 1542 + 21 + x.$$

Выберите самый простой способ решения.

Решение. $x = (1541 – 541) + (1542 – 542) + 21$, $x = 2021$. **Ответ: 2021.**

Комментарий. Возможны и другие варианты простого порядка выполнения действий.

2. Моторная лодка прошла вверх по реке 32 км, а вниз 72 км. Определите время, потраченное на весь указанный путь, если собственная скорость лодки 20 км/ч, а скорость течения 4 км/ч.

Решение. 1. 20 **–** 4 = 16 км/ч – скорость лодки против течения.

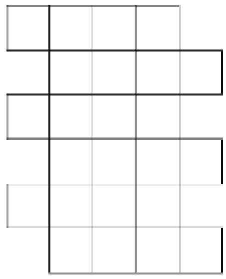
2. 20 + 4 = 24 км/ч – скорость лодки по течению.

3. 32 : 16 = 2 ч – время при движении вверх по реке.

4. 72 : 24 = 3 ч – время при движении вниз по реке.

5. 2 + 3 = 5 ч – общее время движения.

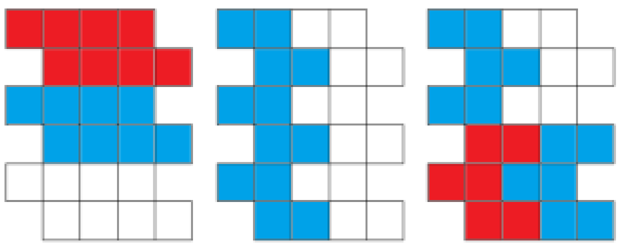
Ответ: 5 ч.



3. Уникум считает, что фигуру, изображенную на рисунке, можно разрезать на две, на три или на четыре равные части так, чтобы линии разрезов шли по сторонам клеток. Докажите это.

Решение.

Критерии оценивания задачи:



4. Уникум-футболист одним ударом разбивает кирпичную кладку на пять частей. На сколько кусков он расколотил кирпичную стену сделав 505 ударов? Каждый удар был направлен ровно в одну часть кирпичной кладки. Конечно, никто стены не ломал, пример умозрительный 😊

Решение. С каждым ударом число кусков увеличивается на 4. Так как изначально была целая стена. После 505 ударов образуется $505 \cdot 4 + 1 = 2021$ кусок. **Ответ: на 2021 кусок.**

5. В числе 2021202120212021 вычеркните 7 цифр так, чтобы в результате получилось наибольшее возможное число делящееся на 3.

Решение. Число состоит из 16 цифр, значит, после вычеркивания 7 цифр останется 9 цифр.

Чтобы получилось наибольшее число надо оставить как можно больше цифр 2.

Цифр 2 всего восемь, в этом случае сумма цифр $8 \cdot 2 = 16$, если добавить 0 или 1, то полученное число не делится на 3.

Если взять семь цифр 2, то в этом случае сумма цифр $2 \cdot 7 = 14$, к цифрам 2 добавим цифры 0 и 1. Получим наибольшее число кратное 3, которое можно получить после вычеркивания: 222222201 (для получения наибольшего числа цифры 2 должны стоять как можно раньше).

Ответ: 2~~0~~2~~1~~2~~0~~2~~1~~2~~0~~2~~1~~20~~2~~1.

6. Числовая последовательность начинается цифрами 2 и 3. Каждый следующий член последовательности определяется как последняя цифра произведения двух предыдущих. Какое число стоит на 2021 месте?

Решение. Заметим закономерность в данной последовательности: 2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, … Видим, что, исключая первые две цифры, получаем цикл из 6 цифр. Следовательно, для того чтобы узнать, какая цифра стоит на 2021 месте необходимо (2021 – 2) разделить на 6 с остатком. Получим 336 полных циклов и три в остатке. Следовательно, на 2021 месте в данной последовательности будет число, стоящее на третьей позиции в цикле, а это 8. **Ответ: 8.**

7. Смеагорл выписывает в ряд 10 цифр так, что двузначное число, образованное любыми двумя подряд стоящими цифрами (стоящими слева направо), делится на 13. Сколькими способами он может построить нужный ряд цифр?

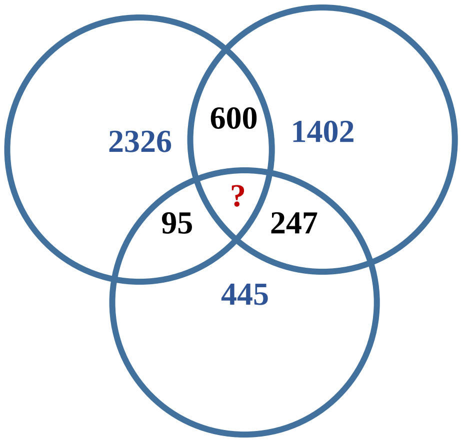
Решение. Двузначное число кратное 13 не может начинаться с 4 или 8. Запись 00 не является двузначным числом.

Если первая цифра 7, то вторая должна быть равна 8, тогда третью цифру получить не получится. Каждая следующая цифра однозначно определяется через предшествующую. Следовательно, все возможные варианты: 1391391391, 2652652652, 3913913913, 5265265265, 6526526526, 9139139139.

Ответ: 6 способами.

Комментарий. За добавление в ответ набора цифр 0000000000 снимается 1 балл.

8. В некоторый учебный год в Липецкой области всего было 3300 школьников, каждый из которых принимал участие хотя бы в одной открытой олимпиаде “Грамотей”, “Уникум” или “Супербит” (финальный этап). В олимпиаде “Грамотей” принимало участие 2326 школьников, в олимпиаде “Уникум” – 1402 школьника, в олимпиаде “Супербит” – 445 школьников. Также оказалось, что 600 школьников были и на олимпиаде “Грамотей”, и на олимпиаде “Уникум”; 95 – на олимпиаде “Грамотей” и на олимпиаде “Супербит”; 247 – на олимпиаде “Уникум” и на олимпиаде “Супербит”. Сколько школьников смогли принять участие сразу в трёх олимпиадах “Грамотей”, “Уникум” и “Супербит”?



Решение. Для иллюстрации этой задачи нужны три круга Эйлера; требуется определить количество школьников внутри всех этих кругов, с учётом того, что общее число школьников 3300.

3300 – (2326 + 1402 + 445) + (600 + 95 + 247) = 69.

Примечание: решение этой задачи представляет собой частный случай формулы включений-исключений для трёх множеств. **Ответ: 69.**

9. Верно ли утверждение: “Среди любых 28 трёхзначных чисел всегда найдутся два числа, сумма цифр которых одинакова”? Ответ обоснуйте.

Решение. Возможные варианты для суммы цифр трёхзначного числа: от 1 + 0 + 0 = 1 до 9 + 9 + 9 = 27, всего 27 вариантов. По принципу Дирихле из 28 чисел обязательно найдутся два имеющих одну сумму цифр. **Ответ: да, верно.**

10. Несколько суворовцев построились в шеренгу. По приказу «Нале-во!» некоторые их них повернулись налево, а некоторые направо. Затем каждую секунду какие-то два суворовца, стоящие друг к другу лицом, поняв свою ошибку, разворачиваются на 180° (становятся друг к другу спиной). Могут ли суворовцы вращаться бесконечно долго?

Решение. Будем обозначать суворовцев, повернувшихся направо, символом 1, а повернувшихся налево символом 0. Тогда после команды «Нале-во!», получится строчка из единиц и нулей. Каждую минуту какой-нибудь фрагмент [01] меняется на [10]. Если рассмотреть строчку как число, состоящее только из 0 и 1, то каждую минуту оно будет только возрастать. Бесконечно оно возрастать не может, так как оно ограничено сверху числом из всех единиц. Значит, рано или поздно, увеличивать дальше будет невозможно, а значит, повороты прекратятся. **Ответ: не могут.**