Матбои-2016, 16.04.2016, финал

1. Любой ли прямоугольный параллелепипед можно разрезать некоторым образом на 2016 прямоугольных параллелепипедов так, чтобы из полученных параллелепипедов можно было сложить куб? Куб не должен иметь частей не занятых полученными параллелепипедами.

2. Из каждого города Тридевятого царства есть сообщение авиалинией с 2016 другими городами, и из каждого города можно долететь до любого другого (возможно с пересадками). Можно ли утверждать, что если закрыть любую авиалинию, всё равно из любого города можно будет долететь до любого другого?

3. Можно ли установить взаимно-однозначное соответствие между всеми действительными точками отрезка [0; 9] и всеми действительными точками интервала (0; 2016)?

4. Обозначим через k_n показатель максимальной целой степени двойки, на которую делится n (например, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$, $k_4 = 2$). Пусть $S_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Докажите, что в наборе S_1, S_2, S_3, …, S_{2^m-1}, где m – некоторое натуральное число, количества нечётных чисел и чётных отличаются на 1.

5. Можно ли числа – 2016, – 2015, – 2014, …, – 1, 0, 1, …, 2015, 2016 расставить так, чтобы среднее арифметическое любых двух из этих чисел не равнялось ни одному из чисел, стоящих между ними?

6. На плоскости расположено $(4n – 1)$ красных и $(4n – 1)$ синих прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Причём любой красный прямоугольник пересекается как минимум с $3n$ синими прямоугольниками, а любой синий как минимум с $3n$ красными. Докажите, что найдется синий прямоугольник, пересекающийся со всеми красными прямоугольниками, и красный, пересекающийся со всеми синими.

7. В параллелограмме $ABCD$ на отрезке AC выбрана точка K. Окружность ω содержит точку K и касается сторон AB и AD в точках M и N соответственно. Окружность ω_1 содержит точку K и касается сторон CD и CB в точках M_1 и N_1 соответственно. Докажите, что вектор соединяющий центры этих окружностей, не зависит от выбора K.

8. На поле a1 шахматной доски находятся в стопке n шашек. За один ход можно взять верхнюю шашку с поля a1 или шашку с некоторого другого поля и переместить её вверх или вправо на одну клетку. Одна над другой шашки могут находиться только на полях a1 и h8, в других полях в каждый момент времени находится не более одной шашки. При каком максимальном n можно двигать шашки по доске так, чтобы в конце на поле h8 они могли бы находиться в любом возможном порядке?