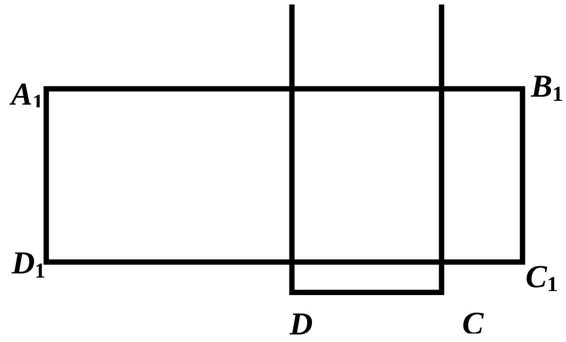
Матбои-2016, 10.04.2016, полуфинал А

1. Равносторонний треугольник перемещают, отражая от одной из его сторон (выбор стороны произволен на каждом шаге). После n отражений он вернулся на прежнее место. Может ли n быть равно 2015? А если бы перемещался правильный шестиугольник?

2. Найдите все целые a и b, для которых верно равенство: $6a^2b + 4a^2 - 5ab - 8a + b + 3 = 0$.

3. Прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ таковы, что $AB \parallel A_1B_1$, а каждый из отрезков AD и BC пересекает каждый из отрезков A_1B_1 и C_1D_1. Могут ли четырёхугольники AB_1CD_1 и A_1BC_1D, быть не равны по площади?



4. На шахматной доске размера 2016 * 2016 в левом нижнем углу стоит чёрная шашка. За один шаг можно поставить на любую клетку доски белую шашку, и заменить все шашки, находящиеся в соседних по стороне или углу клетках, на шашки противоположного цвета. Может ли оказаться так, что, после заполнения всех клеток, чёрных шашек на доске не останется?

5. В пространстве из бесконечности в прошлом в бесконечность в будущем по некоторым скрещивающимся прямым с постоянными скоростями летят два звездолёта (материальные точки). Верно ли, что какую бы декартову систему координат мы не выбрали, найдётся момент времени (в прошлом, будущем или настоящем), когда проекции звездолетов на одну из координатных осей выбранной системы координат будут совпадать? Пространство считать статичным.

6. Сейф закрыт на кодовый замок, имеющий переключатели, которые могут принимать положение двух видов: —, |. Переключатели расположены в клетках таблицы $(2n + 1) * (2n)$ (где $n \in N$) и первоначально занимают произвольное положение. При повороте одного переключателя вместе с ним поворачиваются все переключатели, находящиеся с ним в одной строке и в одном столбце. Всегда ли можно открыть сейф? Сейф открыт, если все переключатели имеют вид: —. В случаях наличия возможностей открытия сейфа опишите соответствующий алгоритм.

$\vert$	$\vert$	$\vert$	—	$\vert$
—	$\vert$	—	$\vert$	—
—	$\vert$	$\vert$	$\vert$	—
$\vert$	—	$\vert$	—	$\vert$

7. Определите, имеется ли среди первых $10^{1\,500}$ натуральных чисел число, кратное 2016, сумма цифр которого равна 2016. Причем в десятичной записи искомого числа можно использовать, только цифры 0 и 9.

8. В системе координат $Oxyz$, плоскости вида $x = S$, $y = S$, $z = S$ (S принимает все возможные целочисленные значения), разбивают пространство на кубики $1 * 1 * 1$. Каждый кубик раскрашен в 1 из 2016 цветов (все цвета встречаются). Два цвета называются соседними, если есть два соседних по грани кубика этих цветов. Какое минимальное значение может принимать количество пар соседних цветов (цвет может соседствовать сам себе)?