Матбои-2016, 9.04.2016, четвертьфинал

1. Число считается “хорошим”, если можно, поставив между цифрами числа арифметические знаки и скобки, получить 100 (можно ставить знаки и скобки перед первой цифрой, после последней цифры). Определите, является ли число 123456 хорошим.

2. Оля пришла к своим подружкам близнецам Ане и Яне. Когда она спросила одну из них «Ты Аня?», то та ответила «Да». Когда она задала тот же вопрос второй девочке, то также получила однозначный ответ, и сразу поняла, кто из них кто. Кто из них Аня, если одна из сестёр никогда не говорит правду.

3. ΔABC – прямоугольный ($\angle B = 90^0$). Из основания H высоты BH опущены перпендикуляры HK и HM на катеты AB и BC соответственно. KL и MN – перпендикуляры, проведенные к BH и AC соответственно. Докажите, что прямые HM и LN перпендикулярны.

4. В магазине есть трое чашечных весов, собственный вес которых был первоначально одинаков. Во время работы в одних весах потерялось несколько деталей, в результате чего они стали легче, но при взвешивании могут давать любой результат. Продавцу сообщили об этом, но он не знает, какие весы сломаны. За какое минимальное количество взвешиваний он гарантированно сможет найти хотя бы одни исправные весы? А какое минимальное количество взвешиваний потребуется для гарантированного нахождения неисправных весов?

На чашках весов вполне умещаются другие весы. Чашечные весы дают три результата: равновесие, груз на левой чашке тяжелее, груз на левой чашке легче.

5. Есть набор натуральных, не обязательно различных чисел a_1, a_2, …, a_k. Обозначим f_i – количество чисел из этого набора не меньших i. Докажете, что сумма всех ненулевых f_i, где i – натуральное число, равна сумме всех чисел набора.

6. Перед началом учебного года в центре “Стратегия” распределяются квоты количества бюджетных мест по естественнонаучным направлениям подготовки. Всего семь направлений подготовки: математика, информатика, физика, химия, астрономия, география, биология. Суммарное число выделенных на все направления мест равно 380, количество мест на каждое из направлений не должно превышать 60 мест. Сколько существует различных вариантов распределения квот по направлениям?

7. Площадь остроугольного треугольника ABC равна S. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, AC и BC в точках M, N и K соответственно. Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Отрезки BO и MK пересекаются в точке E, а отрезки CO и NK пересекаются в точке F. Точка Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на отрезок EF. Найдите площадь треугольника EOF, если высота треугольника ABC, проведенная из вершины A, в 3 раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности и в 12 раз больше OQ.

8. Клетки таблицы 2016×2016 некоторым образом окрашены в чёрный и белый цвета, причём оба цвета присутствуют. Всегда ли можно расставить рациональные числа в её клетках так, чтобы в белых клетках числа были больше среднеарифметического чисел в соседних по стороне клетках, а в чёрных – меньше?

Матбои-2016, 9.04.2016, четвертьфинал

1. Число считается “хорошим”, если можно, поставив между цифрами числа арифметические знаки и скобки, получить 100 (можно ставить знаки и скобки перед первой цифрой, после последней цифры). Определите, является ли число 123456 хорошим.

2. Оля пришла к своим подружкам близнецам Ане и Яне. Когда она спросила одну из них «Ты Аня?», то та ответила «Да». Когда она задала тот же вопрос второй девочке, то также получила однозначный ответ, и сразу поняла, кто из них кто. Кто из них Аня, если одна из сестёр никогда не говорит правду.

3. ΔABC – прямоугольный ($\angle B = 90^0$). Из основания H высоты BH опущены перпендикуляры HK и HM на катеты AB и BC соответственно. KL и MN – перпендикуляры, проведенные к BH и AC соответственно. Докажите, что прямые HM и LN перпендикулярны.

4. В магазине есть трое чашечных весов, собственный вес которых был первоначально одинаков. Во время работы в одних весах потерялось несколько деталей, в результате чего они стали легче, но при взвешивании могут давать любой результат. Продавцу сообщили об этом, но он не знает, какие весы сломаны. За какое минимальное количество взвешиваний он гарантированно сможет найти хотя бы одни исправные весы? А какое минимальное количество взвешиваний потребуется для гарантированного нахождения неисправных весов?

На чашках весов вполне умещаются другие весы. Чашечные весы дают три результата: равновесие, груз на левой чашке тяжелее, груз на левой чашке легче.

5. Есть набор натуральных, не обязательно различных чисел a_1, a_2, …, a_k. Обозначим f_i – количество чисел из этого набора не меньших i. Докажете, что сумма всех ненулевых f_i, где i – натуральное число, равна сумме всех чисел набора.

6. Перед началом учебного года в центре “Стратегия” распределяются квоты количества бюджетных мест по естественнонаучным направлениям подготовки. Всего семь направлений подготовки: математика, информатика, физика, химия, астрономия, география, биология. Суммарное число выделенных на все направления мест равно 380, количество мест на каждое из направлений не должно превышать 60 мест. Сколько существует различных вариантов распределения квот по направлениям?

7. Площадь остроугольного треугольника ABC равна S. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, AC и BC в точках M, N и K соответственно. Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Отрезки BO и MK пересекаются в точке E, а отрезки CO и NK пересекаются в точке F. Точка Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на отрезок EF. Найдите площадь треугольника EOF, если высота треугольника ABC, проведенная из вершины A, в 3 раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности и в 12 раз больше OQ.

8. Клетки таблицы 2016×2016 некоторым образом окрашены в чёрный и белый цвета, причём оба цвета присутствуют. Всегда ли можно расставить рациональные числа в её клетках так, чтобы в белых клетках числа были больше среднеарифметического чисел в соседних по стороне клетках, а в чёрных – меньше?