Решения и методические рекомендации по проверке

Олимпиада 3 класс. Длительность – 70 минут. Заданий – 10.

1. Выполните действия:

$$\mathbf{422 + 17 + 456 + 78 + 44 + 983 + 12.}$$

Укажите самый простой порядок выполнения действий.

Ответ: 422+78+17+983+456+44+12=2012 (порядок действий может быть и другой).

2. На каждом километре дороги между городами Липецком и Тамбовом стоит столб с табличкой, на одной стороне которой указано, сколько километров до Липецка, а на другой – до Тамбова. Уникум заметил, что на одном из столбов записаны числа 36 и 100. Каково расстояние от Липецка до Тамбова?

Ответ: 136 км.

3. Какой цифрой заканчивается произведение 30 множителей $2111 \cdot 2113 \cdot 2115 \cdot ... \cdot 2167 \cdot 2169$ **?**

Решение. Все множители нечетны. Если одна из последних цифр 5, то и в произведении последней цифрой будет 5. Так как при умножении нечетного числа на 5 получается число, заканчивающееся 5.

Ответ: 5.

4. Четыре авторучки, один карандаш и две тетради стоят 53 рубля. Одна авторучка, четыре карандаша и три тетради стоят 67 рублей. Сколько стоит комплект из одной авторучки, одного карандаша и одной тетради?

Решение. 1. 53 + 67 = 120 р. – стоимость пяти авторучек, пяти карандашей и пяти тетрадей.

2. 120 : 5 = 24 р. – стоимость комплект из одной авторучки, одного карандаша и одной тетради.

Ответ: 24 р.

5. У трёх Уникумов вместе 12 книжек с занимательными математическими задачами. У первого Уникума на две книжки меньше, а у третьего на две книжки больше, чем у второго Уникума. Сколько книжек с занимательными математическими задачами у каждого из Уникумов?

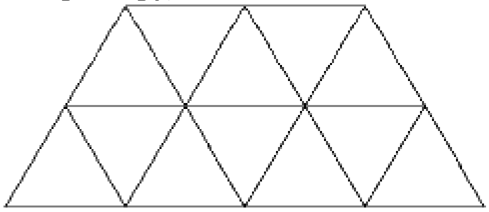
Решение. 1. Если третий Уникум отдаст две книжки первому, то количество книг у Уникумов сравняется.

2. $12 : 3 = 4$ книги – количество книг у каждого Уникума после первого действия.

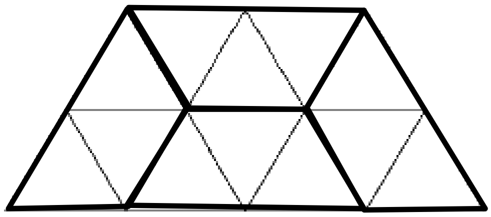
3. Следовательно, у второго Уникума 4 книги, у первого – 2, а у третьего – 6.

Ответ: первого – 2, у второго – 4, у третьего – 6.

6. Можно ли разрезать фигуру, изображенную на рисунке, на четыре равные части (одинаковые по форме и по размеру). Если можно, то каким образом?



Решение.



Ответ: да, можно.

7. (Старинная задача) За 25 бубликов заплатили столько рублей, сколько бубликов можно купить на рубль. Сколько стоит один бублик? Если ответов несколько, то приведите их все и объясните, почему других решений нет.

Решение. 1. Ответ легко отгадать: пусть за 25 бубликов заплатили 5 руб., тогда 5 бубликов можно купить на рубль. Значит, бублик стоит 20 копеек.

2. Других ответов нет, так как при увеличении стоимости бублика общая стоимость бубликов будет увеличиваться, а количество бубликов, которые можно приобрести за один рубль – уменьшаться.

8. Есть три ящика: ящик с апельсинами, ящик с яблоками и ящик со смесью яблок и апельсинов. На каждом ящике есть табличка с указанием что внутри. Таблички взяли и перемешали; теперь оказалось, что все таблички не на своем месте. Есть одна попытка: можно сунуть руку в ящик, и вытащить один фрукт. После этого надо развесить таблички правильно.

Ответ: 1. Если достали апельсин, и на ящике нет таблички “Апельсины”, то на этот ящик вешаем табличку “Апельсины”. На одном из оставшихся ящиков меняем табличку.

2. Если достали апельсин, и на ящике табличка “Апельсины”, то на этот ящик вешаем табличку “Смесь”. На одном из оставшихся ящиков меняем табличку.

3-4. Аналогично для яблок.

9. Гусеница за день с (6:00 часов до 21:00 часов) поднимается на 4 метра вверх по дереву, а вечером (с 21:00 ч. до 24:00 ч.) опускается на 2 метра. Ночью, гусеница спит. В какой день недели гусеница первый раз достигнет высоты в 10 метров, если она начала движение в понедельник в 6:00?

Решение. За первые трое суток гусеница поднимется на 6 метров. В четверг днем гусеница поднимется ещё на 4 метра, и первый раз достигнет высоты 10 метров.

Ответ: четверг.

10. Уникуму для проведения опыта нужно точно отмерить 24 минуты. Обычных часов у него нет, но есть двое песочных часов. Одни – на 20 минут (часы А), другие – на 7 минут (часы В). Как Уникуму удалось точно отмерить требуемое время?

Решение. 1. Запускаем часы одновременно. Часы В переворачиваем через 7 и 14 мин.

2. Через 20 минут (высыплется песок из часов А) переворачиваем часы А. После переворота в часах В песка останется на 1 минуту.

3. Через 21 минуту (песок из часов В высыпался), одновременно переворачиваем часы. После переворота в часах А песка останется на 1 минуту.

4. Через 22 минуты (песок из часов А высыпался), одновременно переворачиваем часы. После переворота в часах В песка останется на 1 минуту.

4. Через 23 минуты (песок из часов В высыпался), одновременно переворачиваем часы. После переворота в часах А песка останется на 1 минуту.

5. Через 24 минуты песок из часов А высыплется, получим время необходимое для опыта.

Возможны и другие правильные способы получения 24 минут.

Решения и методические рекомендации по проверке

Олимпиада 4 класс. Длительность – 70 минут. Заданий – 10.

1. Выполните действия: $125 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 183 \cdot 40 \cdot 11$.

Укажите самый простой порядок выполнения действий.

Решение. $125 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 183 \cdot 40 \cdot 11 = (125 \cdot 8) \cdot (40 \cdot 25) \cdot 183 \cdot 11 = 2\ \ 013\ \ 000\ \ 000$.

Ответ: $2\ \ 013\ \ 000\ \ 000$.

2. На каждом километре дороги между городами Липецком и Тамбовом стоит столб с табличкой, на одной стороне которой указано, сколько километров до Липецка, а на другой – до Тамбова. Уникум заметил, что на одном из столбов записаны числа 36 и 100. Через несколько километров на одной стороне таблички было 54, какое число было с другой стороны этой же таблички?

Решение. 1. 36 + 100 = 136 км – расстояние между городами Липецк и Тамбов.

2. 136 – 54 = 82 км – искомое число.

Ответ: 82 км.

3. Какой цифрой заканчивается произведение 50 множителей $2111 \cdot 2113 \cdot 2115 \cdot \ldots \cdot 2207 \cdot 2209$ **?**

Решение. Все множители нечетны. Если одна из последних цифр 5, то и в произведении последней цифрой будет 5. Так как при умножении нечетного числа на 5 получается число, заканчивающееся 5.

Ответ: 5.

4. У трёх Уникумов вместе 12 книжек с занимательными математическими задачами. У первого Уникума на две книжки меньше, а у третьего на две книжки больше, чем у второго Уникума. Сколько книжек с занимательными математическими задачами у каждого из Уникумов?

Решение. 1. Если третий Уникум отдаст две книжки первому, то количество книг у Уникумов сравняется.

2. $12 : 3 = 4$ книги – количество книг у каждого Уникума после первого действия.

3. Следовательно, у второго Уникума 4 книги, у первого – 2, а у третьего – 6.

Ответ: первого – 2, у второго – 4, у третьего – 6.

5. В мешке находится 40 карандашей. Восемь из них – красные, 7 – желтые, 25 – синие. Какое наибольшее количество карандашей можно взять из этого мешка с закрытыми глазами так, чтобы в мешке остались хотя бы 4 карандаша одного цвета и хотя бы 3 карандаша другого цвета?

Решение. Если будут взяты 6 красных карандашей и 5 желтых, то условие задачи выполняться не будет.

Если не более десяти карандашей, то останется как минимум три или красных, или желтых. Синих будет больше четырех, условие задачи выполняется.

Ответ: 10.

6. В колбу пустили бактерию. Каждую минуту число бактерий удваивается. Через три часа колба заполнилась бактериями. В какой момент бактериями была заполнена четверть колбы?

Решение. За последнюю перед заполнением колбы минуту число бактерий удвоилось. Значит, в 2 часа 59 минут была заполнена половина колбы. Аналогично, четверть колбы была заполнена через 2 часа 58 минут.

Ответ: 2 часа 58 минут.

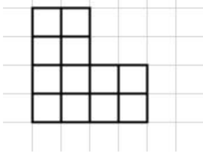
7. Есть три ящика: ящик с апельсинами, ящик с яблоками и ящик со смесью яблок и апельсинов. На каждом ящике есть табличка с указанием что внутри. Таблички взяли и перемешали; теперь оказалось, что все таблички не на своем месте. Есть одна попытка: можно сунуть руку в ящик, и вытащить один фрукт. После этого надо развесить таблички правильно.

Ответ: 1. Если достали апельсин, и на ящике нет таблички “Апельсины”, то на этот ящик вешаем табличку “Апельсины”. На одном из оставшихся ящиков меняем табличку.

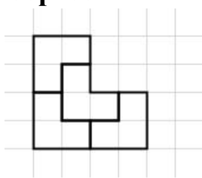
2. Если достали апельсин, и на ящике табличка “Апельсины”, то на этот ящик вешаем табличку “Смесь”. На одном из оставшихся ящиков меняем табличку.

3-4. Аналогично для яблок.

8. Можно ли разрезать фигуру, изображенную на рисунке, разрезать на четыре равные части (одинаковые по форме и по размеру). Если можно, то каким образом?



Решение.



Ответ: да, можно.

9. Найдите все решения числового ребуса

МА + ТЕ + МА + ТИ + КА = УУ.

Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, различные буквы – различные цифры. Объясните отсутствие других решений кроме найденных.

Решение. 1. Буква У может соответствовать только 9, так как лишь сумма 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9 дает однозначное число.

2. Следовательно буква К может соответствовать только 3. М и Т – это 1 или 2. Но 3А + Е + И = 9, причем цифры 1, 2, 3 уже использованы. Следовательно, А – это 0, Е и И – 4 или 5.

Ответ: 10 + 24 + 10 + 25 + 30 = 99;

20 + 14 + 20 + 15 + 30 = 99;

10 + 25 + 10 + 24 + 30 = 99;

20 + 15 + 20 + 14 + 30 = 99.

10. Уникуму для проведения опыта нужно точно отмерить 24 минуты. Обычных часов у него нет, но есть двое песочных часов. Одни – на 20 минут (часы А), другие – на 6 минут (часы В). Как Уникуму удалось точно отмерить требуемое время?

Решение. 1. Запускаем часы одновременно.

2. Через 6 минут (высыплется песок из часов В) одновременно переворачиваем часы. После переворота в часах А будет песка на 14 минут, а в часах В – на 6 минут.

3. Ещё через 6 минут (всего пройдет 12 минут), опять одновременно переворачиваем часы.

После второго переворачивания в часах А будет песка на 12 минут. Когда пройдут эти 12 минут, получим время необходимое для опыта.

Возможны и другие правильные способы получения 24 минут.

Решения и методические рекомендации по проверке

Олимпиада. 5 класс. Длительность – 80 минут. Заданий – 10.

1. Решите уравнение

$$\mathbf{2x + 245 + 576 + 424 + 755 = 1243 + 1542 + 757 + 458 + 12 + x.}$$

Выберите самый простой способ решения.

Решение. $\mathbf{2x + (245 + 755) + (576 + 424) = (1243 + 757) + (1542 + 458) + 12 + x.}$

$\mathbf{x = 2012.}$

Возможны и другие простые способы решения.

Ответ: 2012.

2. Уникум задумал сделать сюрприз для своих друзей к новому году. Для этого он решил придумать такое число, произведение цифр у которого равно 2013? Объясните Уникуму, получится ли ему это сделать или нет?

Решение. В разложении числа 2013 на простые множители получится $2013 = 1 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$. Числа 11 и 61 не являются цифрами, поэтому Уникуму не удастся сделать задуманное.

Ответ: нет, не получится.

3. На каждом километре дороги между городами Липецк и Елец стоит столб с табличкой, на одной стороне которой указано, сколько километров до Липецка, а на другой – до Ельца. Проезжая мимо столба Уникум заметил, что на одной стороне таблички отмечено двузначное число, сумма цифр которого 8, а на другой стороне число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Проехав ещё 18 км, Уникум очень удивился, увидев на столбе те же числа, подумав, он сумел выяснить причину этого факта и определить расстояние между городами Липецк и Елец. Чему равно это расстояние?

Решение. 1. Обозначим числа на табличках: $10x + y$ и $10y + x$ соответственно ($10x + y$ – большее число), $x + y = 8$. Тогда через 18 км на первой стороне таблички будет $10x + y – 18$. По условию $10x + y – 18 = 10y + x$, следовательно, $x – y = 2$.

2. $x + y = 8$, $x – y = 2$. Следовательно, $x = 5$, $y = 3$.

3. 53 + 35 = 88 км – расстояние между городами Липецк и Елец.

Ответ: 88 км.

Возможны другие способы решения.

4. На каникулах два Уникума решили потренироваться в решении задач. Они договорились, что количество задач, которые они решают вдвоем за неделю, не будет меняться. В первую неделю они решили одинаковое число задач. На второй неделе первый Уникум решил в два раза больше задач, чем второй. На третьей неделе второй Уникум решил в три раза больше задач, чем первый. Сколько задач решил за три недели первый Уникум, если общее число задач, решенных двумя Уникумами за три недели, не превосходит 50?

Решение. 1. Каждую неделю Уникумы решали одинаковое число задач (в сумме). Значит, каждую неделю решалось не более 16 задач.

2. На второй неделе первый Уникум решил в два раза больше задач, чем второй. Следовательно, число задач, решаемых в неделю, должно быть кратно трем.

3. На третьей неделе второй Уникум решил в три раза больше задач, чем первый. Следовательно, число задач, решаемых в неделю, должно быть кратно четырем.

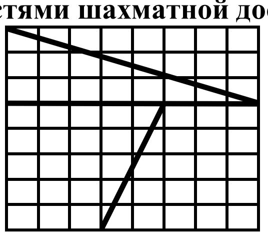
4. Среди чисел, не превосходящих 16, только число 12 кратно и трем и четырем. Следовательно, каждую неделю Уникумы решали по 12 задач в сумме.

5. Первый Уникум решил на 1, 2 и 3 неделях, соответственно, 6, 8 и 3 задачи. Всего: 6 + 8 + 3 = 17 задач.

Ответ: 17 задач.

5. Незнайка сказал, что может разрезать шахматную доску (квадрат 8 * 8, рисунок 1) указанным на рисунке способом и собрать из полученных частей прямоугольник (рисунок 2). Уникум не поверил Незнайке и сумел объяснить, что собрать прямоугольник не удастся. Как Уникуму удалось опровергнуть Незнайку?

Отдельные части не должны накладываться друг на друга. Прямоугольник не должен содержать участков не закрытых частями шахматной доски.



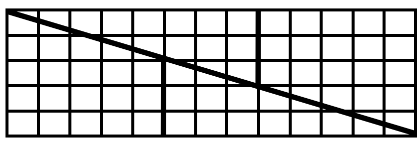


рисунок **1** *рисунок* **2**

Решение. Квадрат имеет площадь 64, а прямоугольник $5 \cdot 13 = 65$. Следовательно, прямоугольник собрать не удастся.

6. В одном классе ученики разделились на две группы. Одни должны были всегда говорить только правду, а другие – только неправду. Все ученики класса написали сочинение на свободную тему, которое должно было заканчиваться фразой "Всё здесь написанное, правда" или "Всё здесь написанное, ложь". В классе было 15 правдолюбцев и 12 лжецов. Сколько получилось сочинений с утверждением о правдивости написанного? Объясните ответ.

Решение. 1. Каждый правдолюбец написал в сочинении правду, следовательно, и завершить сочинение он должен был утверждением: "Всё здесь написанное, правда".

2. Каждый лжец написал в сочинении ложь, завершить сочинение он тоже должен быть неправдим утверждением: "Всё здесь написанное, правда".

Ответ: 27.

7. В мешке находится 40 карандашей. Восемь из них – красные, 7 – желтые, 25 – синие. Какое наибольшее количество карандашей можно взять из этого мешка с закрытыми глазами так, чтобы в мешке остались хотя бы 4 карандаша одного цвета и хотя бы 3 карандаша другого цвета?

Решение. Если будут взяты 6 красных карандашей и 5 желтых, то условие задачи выполняться не будет.

Если не более десяти карандашей, то останется как минимум три или красных, или желтых. Синих будет больше четырех, условие задачи выполняется.

Ответ: 10.

8. Два Уникума отправились одновременно навстречу друг другу из двух школ, расстояние между которыми 4 км. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй – 3 км/ч. Всё время движения Уникумов с плеча одного Уникума на плечо другого непрерывно перелетала муха (на плече она не задерживалась). Сколько километров пролетела муха до встречи Уникумов, если её скорость 6 км/ч?

Решение. 1. $4:(3+5)=0,5$ ч. – время движения Уникумов, а следовательно, и время движения мухи.

2. $6 \cdot 0,5 = 3$ км. – расстояние, которое пролетела муха.

Ответ: 3.

9. Гусеница за день с (6:00 до 21:00) поднимается на 40 сантиметров вверх по дереву, а вечером (с 21:00 до 24:00) опускается на 20 сантиметров. Ночью (с 0:00 до 6:00 гусеница спит). В какой день недели гусеница первый раз достигнет высоты в 2 метра, если она начала движение в понедельник в 6:00?

Решение. За первые восемь суток гусеница поднимется на 1,6 метра. Во вторник днем гусеница поднимется ещё на 40 сантиметров, и первый раз достигнет высоты 2 метра.

Ответ: вторник.

5 баллов – правильный ответ с объяснением.

4 балла – правильный ответ.

1 балл – ответ: среда.

10. (Задача Л.Н. Толстого) Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились: одна половина осталась косить большой луг (и докосила его к концу дня), а другая перешла косить второй луг, вдвое меньший первого, но не успела к концу дня закончить косьбу. На другой день на этот луг вышел один косец и в течение всего дня докосил его. Сколько всего было косцов? Косцы всё время работали одинаково.

Решение. 1. Примем объём работы, выполненной за день косцами, за единицу.

2. Тогда $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ – объём работы, выполненный косцами, на большем лугу.

3. $\frac{3}{4}:2=\frac{3}{8}$ – объём работы, который необходимо выполнить для того, чтобы завершить косьбу на втором лугу.

4. $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ – объём работы, выполненный косцами, на меньшем лугу в первый день.

5. $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\right)-1=\frac{1}{8}$ – часть работы, оставшаяся на второй день.

6. $1:\frac{1}{8}=8$ косцов.

Ответ: 8 косцов.

Решения и методические рекомендации по проверке

Олимпиада. 6 класс. Длительность – 80 минут. Заданий – 10.

1. Выполните действия:

$$-12{,}5\cdot 0{,}25\cdot(-8)\cdot(-183)\cdot(-40)\cdot(-11).$$

Укажите самый простой порядок выполнения действий.

Решение. Пять отрицательных чисел, следовательно, произведение отрицательно.

$$-12{,}5\cdot 0{,}25\cdot(-8)\cdot(-183)\cdot(-40)\cdot(-11)=-(12{,}5\cdot 8)\cdot(40\cdot 0{,}25)\cdot 183\cdot 11=2\quad 013\quad 000$$

Ответ: $2\quad 013\quad 000$.

2. 9 кг вкусных конфет стоят дешевле 1000 рублей, а 10 кг тех же вкусных конфет – дороже 1110 рублей. Сколько стоит 1 кг конфет? (Стоимость округляется до десятков копеек.)

Решение. 1. По первому условию килограмм конфет стоит дешевле $111\frac{1}{9}$ руб.

2. По второму условию килограмм конфет стоит дороже 111 руб.

3. С учетом округления стоимости до десятков копеек единственный вариант ответа 111 рублей 10 копеек.

Ответ: 111 рублей 10 копеек.

3. Однажды 24 жителя острова правдолюбцев и лжецов встали в круг, и каждый из них заявил, что один из его соседей – правдолюбец, а другой лжец. Сколько правдолюбцев и сколько лжецов могло быть среди этих 24 человек? Укажите все ответы.

Решение. 1. Если среди 24 жителей острова есть правдолюбец, тогда его соседи лжец и правдолюбец: Л***П***П. У второго правдолюбца соседи также лжец и правдолюбец: Л***П***ПЛ. Лжец должен соврать, и так как один из его соседей правдолюбец, то другой также должен быть правдолюбцем: ПЛ***П***ПЛП. Рассуждая аналогично, получим, что правдолюбцев в два раза больше лжецов. Получим 8 лжецов, 16 правдолюбцев.

2. Если среди 24 жителей острова все лжецы, то условие задачи также выполняется.

Ответ: 1) 8 лжецов, 16 правдолюбцев; 2) 24 лжеца.

4. Сколькими нулями оканчивается произведение: $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 29\cdot 30$ **?**

Решение. 1. Количество нулей в конце числа равно наименьшей из степеней 2 и 5 в разложении данного числа на простые множители. В рассматриваемом произведении в разложении на простые множители 5 будет меньше, поэтому количество нулей совпадает со степенью 5.

2. Среди множителей данного произведения 6 чисел (т.к. $30:5=6$), делящихся на 5; 1 число, делящееся на 25.

Следовательно, в разложении произведения на простые множители число 5 будет содержаться в 6 + 1 = 7 степени.

Ответ: 7.

5. Незнайка сказал, что может разрезать шахматную доску (квадрат 8 * 8, рисунок 1) указанным на рисунке способом и собрать из полученных частей прямоугольник (рисунок 2). Уникум не поверил Незнайке и сумел объяснить, что собрать прямоугольник не удастся. Как Уникуму удалось опровергнуть Незнайку?

Отдельные части не должны накладываться друг на друга. Прямоугольник не должен содержать участков не закрытых частями шахматной доски.

***рисунок* 1**

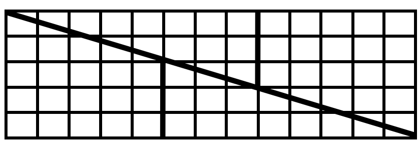


***рисунок* 2**

Решение. Квадрат имеет площадь 64, а прямоугольник $5\cdot 13=65$. Следовательно, прямоугольник собрать не удастся.

6. Все целые числа от 0 до 2012 записаны случайным образом в два столбца (получилось 1006 строк по два числа, в последней строке одно число). В каждой строке из большего числа вычли меньшее, и результат записали в третий столбец (в последней строке в третий столбец переписали единственное число). Все числа третьего столбца перемножили. Могли ли в результате получиться числа: а) 4022; б) 6033?

Решение. а) Разложив на множители получаем $4022=2011\cdot 2$.

Теперь легко получить требуемое расположение чисел.

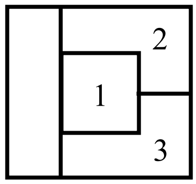
1 столбец	2 столбец	3 столбец
1	0	1
3	2	1
5	4	1
…	…	…
2009	2008	1
2012	2010	2
2011		2011

Ответ: число 4022 могло получиться.

б) Среди рассматриваемых чисел 1006 нечетных и 1007 четных, поэтому или, как минимум, в одной строке окажутся два четных числа, или четное число будет в последней строке. В любом случае в третьем столбце будет хотя бы одно четное число, а, следовательно, произведение должно быть обязательно четно.

Ответ: число 6033 не могло получиться.

7. Известно, что политическую карту (карту на которой изображены страны, регионы) можно раскрасить в четыре цвета так, что любые две страны, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета. Можно ли окрасить любую политическую карту в три цвета? Считается, что граница каждой страны непрерывная линия.



Решение. Приведем контпример карты, которую нельзя окрасить в три цвета. Для трех пронумерованных областей обязательно нужно использовать три цвета. Непронумерованную область нельзя закрасить ни в один из указанных цветов.

Ответ: нет, существуют карты, которые нельзя окрасить в три цвета.

8. Имеются песочные часы, отмеряющие 12 минут. В 12 часов дня на часах нулевое состояние, и Уникум переворачивая часы, запускает их. Часы остановились в 12 часов 18 минут, и за прошедшие 18 минут Уникум два раза их переворачивал. Один раз часы были перевернуты в 12 часов 8 минут, когда Уникум ещё раз переворачивал часы?

Решение. 1. Возможны два варианта: в 12 часов 8 минут часы перевернули второй раз или в первый раз.

2. Если в 12 часов 8 минут часы перевернули второй раз, то в это время в часах должно остаться песка на 10 минут, чтобы в 12 часов 18 минут весь песок высыпался. Если в 12 часов 5 минут часы перевернуть, то через 3 минуты в них останется песка на 2 минуты, а после переворачивания на 10 минут, что и требовалось.

3. Если в 12 часов 8 минут часы перевернули первый раз, то в них после переворачивания песка будет на 8 минут. Через три минуты часы нужно перевернуть, тогда в них будет песка на 7 минут и весь песок высыплется ровно в 12 часов 18 минут.

Ответ: 12 часов 5 минут или 12 часов 11 минут

9. Два Уникума отправились одновременно навстречу друг другу из двух школ, расстояние между которыми 4 км. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй – 3 км/ч. Всё время движения Уникумов с плеча одного Уникума на плечо другого непрерывно перелетала муха (на плече она не задерживалась). Сколько километров пролетела муха, если её скорость 6 км/ч?

Решение. 1. $4:(3+5)=0,5$ ч. – время движения Уникумов, а, следовательно, и время движения мухи.

2. $6\cdot 0,5=3$ км. – расстояние, которое пролетела муха.

Ответ: 3.

10. На каждом километре дороги между городами Липецк и Тула стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано, сколько километров до Липецка, а на другой – до Тулы. Уникум заметил, что на каждом столбе сумма всех цифр равна 22. Каково расстояние от Липецка до Тулы?

Решение. 1. Сумма двух чисел, записанных на одной табличке постоянная и равна расстоянию от Липецка до Тулы.

2. Докажем, что если у натурального числа любое его представление в виде суммы двух натуральных чисел имеет одинаковую сумму цифр, то все цифры числа кроме первой должны равняться 9.

Предположим противное, что не первая цифра отлична от 9. Оставим только рассматриваемую цифру и первую ей предшествующую отличную от нуля. Получим число вида $10x + y$, с суммой цифр $x + y$. Представим данное число следующим образом $10x + y = (10(x - 1) + 9) + (y + 1)$, с суммой цифр $x - 1 + 9 + y + 1 = x + y + 9$. Получили противоречие $x + y + 9 > x + y$. Следовательно, числа, у которых не первая цифра отлична от 9, не подходят.

Если у натурального числа все цифры кроме первой 9, то при разложении этого числа в виде суммы двух натуральных сумма цифр в каждом разряде не изменяется.

3. Искомое расстояние от Липецка до Тулы должно быть представлено натуральным числом, все цифры которого, кроме первой, равны 9. Для суммы цифр 22 такое число одно: 499.

Ответ: 499 км.

Возможны другие способы решения.