Решения и методические рекомендации по проверке

3 мая 2018 г. Олимпиада 3 класс. Длительность – 70 минут. Заданий – 10.

1. Поставьте в записи 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 9 вместо звездочек знаки плюс или минус так, чтобы получилось верное равенство. Достаточно привести один пример расстановки знаков.

Ответ: 1 + 2 – 3 + 4 + 5 = 9.

2. Укажите все числа, отличающиеся на 2 от числа 2018.

Ответ:2016 и 2020.

3. Ученик третьего класса семь дней готовился к олимпиаде “Уникум”. В первый день он решил 1 задачу, во второй день 2 задачи, в третий – 3, и так далее (в седьмой день он решил 7 задач). Сколько задач решил этот ученик за все семь дней подготовки.

Решение. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.

Ответ: 28 задач.

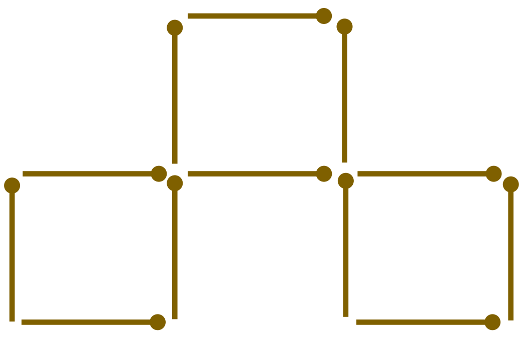
4. Разгадайте ребус.

$\boxed{}$	+	$\boxed{}$	=	10
+		+		
$\boxed{}$	–	$\boxed{}$	=	3
=		=		
12		5		

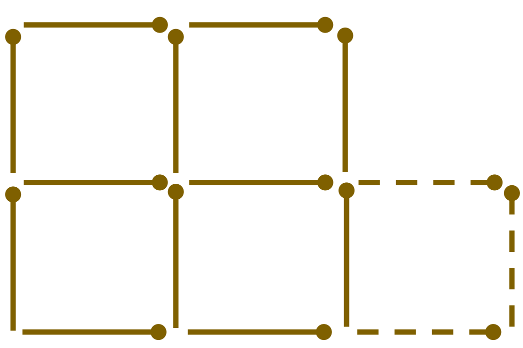
Ответ:

$\boxed{7}$	+	$\boxed{3}$	=	10
+		+		
$\boxed{5}$	–	$\boxed{2}$	=	3
=		=		
12		5		

5. В фигуре, изображенной на рисунке, нужно переложить три спички, чтобы получилось пять квадратов. Возможно квадраты будут различны и некоторые из квадратов будут внутри других.



Решение.



6. Совунья очень любит принимать солнечные ванны. По полчаса через час. Сколько часов грелась Совунья с 9.00 до 18.00?

Решение. За каждые три часа Совунья греется ровно два раза (всего один час), следовательно, с 9.00 до 18.00 (за 9 часов) она проведет на солнце 3 часа.

Ответ: 3 часа.

7. Излюбленным занятием хоббитов на Празднике Урожая является игра в “Эльфов и орков” – хоббиты распределяют между собой роли эльфов и орков (зная при этом, кто есть кто), причем эльфы всегда правдивы, а орки – постоянно лгут. 9 хоббитов сели за круглый стол, и каждый из них сказал фразу “Мои соседи эльф и орк”. Сколько хоббитов могло оказаться в роли орков?

Решение. 1. Если два орка сидят подряд, тогда и все остальные, сидящие за столом, орки – 9.

2. Если есть хотя бы один эльф, то рядом с ним ещё одни эльф и орк, единственное возможное расположение в этом случае будет таким: ЭЭОЭЭОЭЭО (Э-эльф, О-орк) – 3.

Ответ: 9 или 3.

8. Радагаст Карий записывал все натуральные числа от 1 до 100 в таком порядке: сначала он выписывал в порядке возрастания числа с суммой цифр, равной 1; затем, также в порядке возрастания, числа с суммой цифр 2, потом – числа, сумма цифр которых равна 3 и т.д. Каким по счету он выписал число 96?

Решение. Сумма цифр числа 96 равна 15. Причём 96 – самое большое из выписанных с такой суммой цифр (так как в первых двух разрядах стоят максимально большие цифры). Значит, после числа 96 выписаны только числа с суммой цифр 16, 17, 18 (Никакое из выписанных чисел не может иметь сумму цифр, большую 18, так как число 99 имеет максимально возможную сумму цифр из всех двузначных). Сумму цифр 18 имеет только число 99, сумму цифр 17 – числа 98, 89, сумму цифр 16 – числа 97, 79, 88. Таким образом, после числа 96 было выписано 6 чисел, значит, оно оказалось на 94-м месте.

Ответ: 94.

9. Крош, Ёжик, Нюша и Бараш вместе съели 70 яблок, причем каждому сколько-то досталось. Крош съел больше каждого из остальных, а Нюша и Бараш вместе съели 45 яблок. Сколько яблок досталось Ёжику.

Решение. Поскольку Нюша и Бараш вместе съели 45 яблок, то кто-то из них съел не менее 23 яблок. Значит, Крош съел не менее 24 яблок. Значит, Крош, Нюша и Бараш вместе съели не менее 69 яблок. Поскольку Ёжику тоже что-то досталось, то ему осталось одно яблоко.

Ответ: 1 яблоко.

10. Напишите в строку семь различных чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была не больше 11. А сумма всех чисел не меньше 40.

Ответ: например, 10 1 9 2 8 3 7.

Решения и методические рекомендации по проверке

3 мая 2018 г. Олимпиада 4 класс. Длительность – 70 минут. Заданий – 10.

1. Поставьте в записи 1*2*3*4*5 = 30 вместо звездочек знаки арифметических действий: +, –, •, : так, чтобы получилось верное равенство. Достаточно привести один пример расстановки знаков.

2. Участник математической олимпиады "Уникум" решил 10 задач за 1 час 10 минут, причем на каждую задачу он затратил одинаковое время. Сколько минут школьнику потребовалось на решение первых трёх задач?

Решение. 1. 1 ч. 10 мин. = 70 мин.

2. 70 : 10 = 7 мин. – время на решение одной задачи.

3. 3 · 7 = 21 мин. – время на решение трёх задач.

Ответ: 21 мин.

3. У Бильбо на кухне имеются чашечные весы, позволяющие сравнивать массы положенных на чаши вещей. Вишневый пудинг уравновесили кекс и 2 яблока, а пудинг и яблоко уравновесили 2 кекса. Сколько яблок уравновесят пудинг?

Решение.

пудинг = кекс + 2 яблока;

пудинг + яблоко = кекс + 2 яблока + яблоко = 2 кекса,

откуда кекс = 3 яблока. Поэтому пудинг = 5 яблок.

Ответ: 5.

4. Лосяш попросил Копатыча распилить пять бревен длиной 6 метров каждое на полуметровые части. Сколько раз Копатычу придется перепиливать бревна, то есть сколько всего придется сделать распилов?

Решение. Каждое бревно необходимо распилить на 12 равных полуметровых частей. Для этого достаточно на каждом бревне Копатычу достаточно сделать 11 распилов. Всего на пяти бревнах надо сделать 55 распилов.

Ответ: 55.

5. Крош, Нюша и Ёжик съели каждый по 5 морковок, затем вдвое больше, чем морковок, яблок, далее втрое больше, чем яблок, груш и, наконец, вдвое меньше, чем груш, конфет. Сколько штук разной вкуснятины съели вместе Крош, Нюша и Ёжик?

Решение. 1. 5 · 3 = 15 морковок.

2. 15 · 2 = 30 яблок.

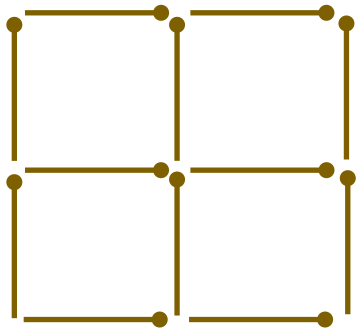
3. 30 · 3 = 90 груш.

4. 90 : 2 = 45 конфет.

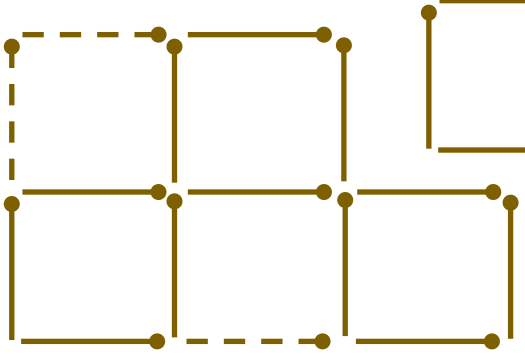
5. 15 + 30 + 90 + 45 = 180 штук.

Ответ: 180 штук.

6. В фигуре, изображенной на рисунке, нужно переложить три спички так, чтобы получилось три квадрата.



Решение.



7. Наступил праздник Урожая, и вечером все хоббиты по традиции собираются на площади, чтобы отметить этот день и посмотреть на запускаемые Гендальфом фейерверки. На улице стемнело, а дома у Бильбо Беггинса, закончились свечи! И Бильбо, нарядившийся в свой лучший кафтан, нужно достать из сундука пару ботинок – вслепую. Известно, что всего у него 12 пар черных и 12 пар синих ботинок. Конечно, он хотел бы достать пару черных, но подойдет и пара синих. Он может взять какое-то количество ботинок, вынести к окну, откуда светит уличный фонарь, и посмотреть, что он взял. Какое наименьшее количество ботинок ему нужно взять, чтобы получилась: а) пара одноцветных; б) пара черных (все ботинки перемешаны, да еще нужно учесть, что пара должна быть левая + правая)?

Решение. а) оценка: 24-х недостаточно, т.к. из них может быть по 12 одного из цветов, причем все 24 – левые или правые (возможно, что черные левые, а синие правые или наоборот). При этом, добавив еще один ботинок, будем иметь минимум два ботинка одного цвета, левый и правый.

б) если взять 36 ботинок, то 24 из них могут оказаться синими, а остальные 12 – левыми чёрными, и составить из них чёрную пару не получится. Если взять 37 ботинок, то хотя бы 13 из них будут чёрными, а значит, будет точно хотя бы один чёрный левый, и, хотя бы один чёрный правый.

Ответ: а) 25; б) 37.

8. Лосяш и Копатыч ловили рыбу. Лосяш поймал на 9 окуней меньше чем Копатыч, а Копатыч – в 4 раза больше чем Лосяш. Сколько окуней они поймали вместе?

Решение. 1 способ. Пусть x окуней поймал Лосяш, тогда $4x$ окуней поймал Копатыч. Составив и решив уравнение $4x - x = 9$, имеем, $3x = 9$, $x = 3$ окуней (поймал Лосяш), а 12 окуней поймал Копатыч. Следовательно, всего было поймано 15 окуней.

2 способ. Копатыч поймал 4 улова Лосяша. Значит, 9 окуней составляют 3 улова Лосяша. Следовательно, улов Лосяша 3 окуня, а Копатыча – 12 окуней. Всего 15 окуней.

Ответ: 15 окуней.

9. Двенадцать учеников школы № 777 пришли на олимпиаду “Уникум”. Чтобы подкрепится перед соревнованием они купили семь одинаковых пирогов. Помогите, если это возможно, разделить купленные пироги поровну между всеми 12 школьниками, не разделяя при этом ни один из пирогов на 12 равных частей.

Решение. 1. Доля каждого школьника 7/12 пирога

2. 7/12 = 1/3 + 1/4.

3. Разделим вначале каждый из 4 пирогов на три равные части, получим 12 частей по 1/3 пирога. Затем, разделим каждый из 3 оставшихся пирогов на четыре равные части, получим 12 частей по 1/4 пирога. Отдав каждому ученику по 1/3 и 1/4 пирога, получим решение задачи.

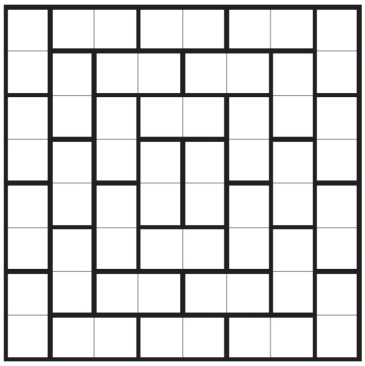
Комментарий. Деление пирога на части кратные 12 не удовлетворяет условию задачи.

10. От своей тетушки Бильбо Беггинсу досталось домино, но в привычном виде эта игра хоббита не радовала, и он придумал ему другое применение.

а) Взяв шахматную доску 8 х 8, Бильбо хочет заполнить ее доминошками 1 х 2 (не выходя за край доски) так, чтобы только две доминошки образовывали квадрат 2 х 2. Помогите ему это сделать.

б) Бильбо взял шахматную доску 8 х 8 и хочет замостить (заполнить) ее доминошками 1 х 2, оставляя при этом свободными левую нижнюю и правую верхнюю клетки доски. Сможет ли Бильбо это сделать?

Решение. а) См. рисунок.



б) Пусть поля этой доски покрашены, как в шахматах. Заметим, что вырезанные поля одного цвета. Любая доминошка покрывает одну белую и одну черную клетку. Значит, при разбиении фигуры на доминошки, количество белых и черных клеток должно быть одинаково. Но в описанном в задаче случае, клеток одного цвета 30, а другого 32.

Ответ: а) см. рисунок; б) нет.

Решения и методические рекомендации по проверке

3 мая 2018 г. Олимпиада. 5 класс. Длительность – 80 минут. Заданий – 10.

1. Определите последнюю цифру в произведении $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$.

Ответ: 0.

2. Разгадайте ребус. Знак “x” соответствует умножению, знак “:” соответствует делению. Единственность результатов доказывать не нужно.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{} & \times & \boxed{} & = & 24 \\ \times & & \times & & \\ \boxed{} & : & \boxed{} & = & 3 \\ \| & & \| & & \\ 36 & & 8 & & \end{array}$$

Ответ:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{6} & \times & \boxed{4} & = & 24 \\ \times & & \times & & \\ \boxed{6} & : & \boxed{2} & = & 3 \\ \| & & \| & & \\ 36 & & 8 & & \end{array}$$

3. Самолёт пролетел за $\frac{2}{3}$ **часа** $\frac{1}{4}$ **своего маршрута. Какую часть своего маршрута он пролетел за 1 час?**

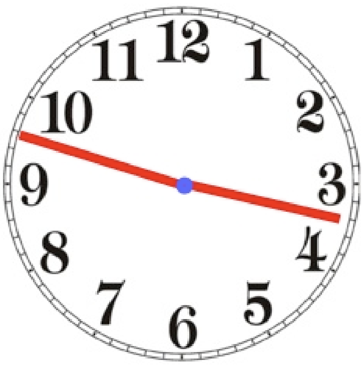
Решение. $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$

Ответ: 3/8.

5 баллов – правильный ответ.

1-2 балла – некоторые правильные идеи решения.

4. Гендальф подарил на день рождения Бильбо механические настенные часы, см. рисунок. Повесив он их в той части дома, где проводил больше всего времени – т.е. на кухне, конечно же, за чашечкой горячего чая Бильбо наблюдал за часами и стрелками, и однажды заметил, что в какой-то момент часовая и минутная стрелки разделили циферблат на две части, в каждой из которых сумма чисел оказалась одинаковой. Обрадовавшись такому открытию, Бильбо поспешил рассказать об этом Гендальфу, однако забыл, как же располагались стрелки (зато смесь сортов чая, который он пил, Бильбо помнил очень хорошо, и не преминул Гендальфа угостить). Помогите Бильбо вспомнить положение стрелок.



Решение. См. рисунок.

5. Карыч и Совунья чистили картофель. Карыч очищал в минуту 2 картофелины, а Совунья – 3. Вместе они очистили 400 штук. Сколько времени работал каждый из них, если Совунья проработала на 25 минут больше Карыча.

Решение. За 25 минут, что Совунья работала одна, она очистила 75 картофелин. Значит, работая вместе, Карыч и Совунья очистили 325 картофелин. Так как за минуту они вместе очищали 5 картофелин, то, вместе они работали 65 минут. Следовательно, Карыч работал 65 минут, а Совунья – 90 минут.

Ответ: Карыч работал 1 ч. 5 мин. (65 минут), а Совунья – 1 ч. 30 мин. (90 минут).

6. Для нумерации научного труда Лосяшу потребовалось 2322 цифры. Сколько страниц заключает в себя работа Лосяша?

Решение. Однозначных натуральных чисел девять (от 1 до 9), двузначных натуральных чисел 90 (от 10 до 99). Если обозначить через x число страниц, имеющих трехзначный номер, то $9 + 2 \cdot 90 + 3x = 2322$, $x = 711$. Всего страниц: $9 + 90 + 711 = 810$.

Ответ: 810.

7. Пиппин, Мерри и Сэм поспорили, чей пирог, приготовленный по знаменитому рецепту из поваренной книги Гондора, самый вкусный, и пришли к Фродо, чтобы он их рассудил. Проблема в том, что пироги были съедены, но каждый из друзей знал, у кого получилось вкуснейшее блюдо, однако никто не хотел признавать поражение.

В ходе прений были высказаны следующие утверждения:

Пиппин: 1. “Мой пирог самый вкусный”. 2. “Пирог Сэма не самый вкусный”.

Мерри: 1. “Пирог Пиппина хороший, но не самый вкусный”. 2. “Мой пирог самый лучший”.

Сэм: “Мой пирог вкуснее всех”.

Фродо исходил из предположения, что моральные качества хоббита напрямую зависят от его кулинарных способностей, и рассудил, что единственный, кто сказал правду (в каждом из своих утверждений) – и испек наивкуснейший пирог, а у тех, кто обманул (в каждом из своих утверждений) – пирог вышел хуже.

Кого же Фродо признал лучшим специалистом по пирогам?

Решение. Предположим, что Фродо назвал Мерри. Тогда остальные, включая Пиппина, должны солгать. Однако фраза Пиппина “Пирог Сэма так себе, не самый вкусный” – правдивая, противоречие.

Предположим, что Фродо назвал Сэма. Тогда остальные, включая Мерри, должны солгать. Однако фраза Мерри “Пирог Пиппина хороший, но не самый вкусный” – правдивая, противоречие.

Остается предположить, что Фродо назвал Пиппина – и в этом случае противоречия нет.

Ответ: Пиппин.

8. Крош помнит, что Нюша родилась в мае месяце, но какого числа он забыл. Он помнит только то, что число совпадает с первой цифрой наименьшего натурального числа, сумма цифр которого равна 2018. Помогите Крошу вспомнить когда день рождения у Нюши.

Решение. Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию данной задачи, должно содержать минимальное количество цифр. Чтобы цифр получилось, как можно меньше, начиная с конца будем заполнять число девятками (9 – самая большая цифра). Если разделить 2018 на 9, то получается остаток 2. Поставив цифру 2 вперед и, записав 224 девятки, получаем наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 2018. Значит, день рождения Нюши выпадает на 2 число.

Ответ: 2 мая (в ответе можно было просто написать: 2).

9. В биоквантуме Липецкого Кванториума вывели вечноцветущее чудо-растение. Если в какой-то день количество цветков на нём четно, то на следующий день это количество уменьшается в два раза. А если в какой-то день количество цветков на нём нечетно, то на следующий день это количество увеличивается в два раза. В один из дней кванторианцы насчитали на чудо-растении 2018 цветков. Могло ли через несколько дней на нём оказаться 2020 цветков?

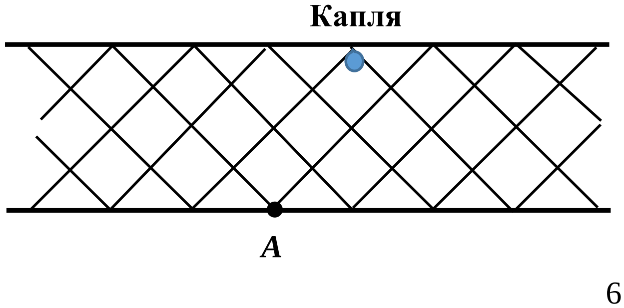
А если чудо-растений было несколько, и общая сумма цветков на них была 2018. Могло ли через несколько дней на этих растениях в сумме оказаться 2020 цветков?

Решение: 1. Если на растении 2018 цветков, то на следующий день их будет 1009. В дальнейшем количества цветков: 2018 и 1009 будут чередоваться. 2020 цветков никогда не получится.

2. Например, было четыре чудо-растения с количеством цветков: 673; 1; 1342; 2. На следующий день количество цветков стало, соответственно, 1346; 2; 671; 1. Так как $1346 + 2 + 671 + 1 = 2020$, то второй случай возможен.

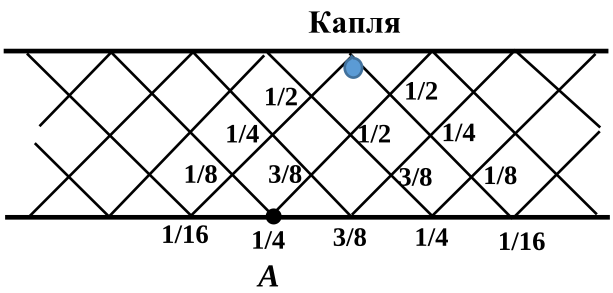
Ответ: 1) нет, не могло; 2) да, могло.

10. Капля воды стекает по металлической сетке (см. рис.). В каждом узле сетки капля с равными шансами стекает по прутьям сетки вправо вниз и влево вниз. Какая часть капли окажется в точке *А*? Указанные действия проходят без потери воды.



Решение. Составим схему, указывающую на часть капли, которая в некоторый момент времени будет находиться в каждом из узлов сетки. При переходе на более нижний уровень часть капли делится пополам. Части капли, поступающие из двух источников, объединяются.

Сумма частей капель на каждом уровне равна 1.
Ответ: ¼.



Решения и методические рекомендации по проверке

3 мая 2018 г. Олимпиада. 6 класс. Длительность – 80 минут. Заданий – 10.

1. Восстановите пример ** · * = 2018 Вместо знака звездочки * может стоять любая цифра. Укажите все возможные варианты.**

Ответ: 1009 · 2 = 2018, 2018 · 2 = 2018, варианта только два, так как 1009 простое число.

2. Участник олимпиады “Уникум” взял с собой две пачки печенья. В первой пачке печенья было в три раза больше, чем во второй. Если из первой пачки переложить два печенья во вторую, то печенья в пачках станет поровну. Сколько печенья было в каждой пачке?

Решение. $3x - 2 = x + 2$; $x = 2$.

Ответ: 6; 2.

3. Верёвку длиной 84 м. разрезали на два куска так, что 0,4 длины первого куска были равны 0, 3 длины второго куска. Найдите длину каждого куска верёвки.

Решение. Длины кусков верёвки относятся как 3 : 4. Обозначив через x – коэффициент пропорциональности этого отношения, получим уравнение $3x + 4x = 84$. Имеем $x = 12$.

Ответ: 36 м. и 48 м.

4. Пин задумал двузначное число. Найдите это число, если известно, что у него цифра десятков на 2 больше цифры единиц. Если это число разделить на цифру единиц, то в частном получится 13, а в остатке число, которое на 1 меньше делителя.

Решение. Пусть x – цифра единиц искомого двузначного числа, тогда цифра десятков этого числа равна $x + 2$. Двузначное число можно записать в виде $10(x + 2) + x = 13x + x - 1$. Имеем $x = 97$.

Ответ: 97.

5. Однажды Бильбо засмотрелся на настенные часы (см. рисунок) и задумался, а возможно ли такое положение стрелок, при котором циферблат будет разделен на две части с одинаковой суммой <u>цифр</u>? Помогите ответить на этот вопрос.

Решение. Так разрезать невозможно. Если бы так разрезать удалось, то суммы цифр в каждой из частей были бы равны, а, значит, сумма всех цифр была бы четной. Убедимся, что это не так: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + (1 + 0) + (1 + 1) + (1 + 2) = 45 + 1 + 2 + 3 = 51$ – нечетное число.

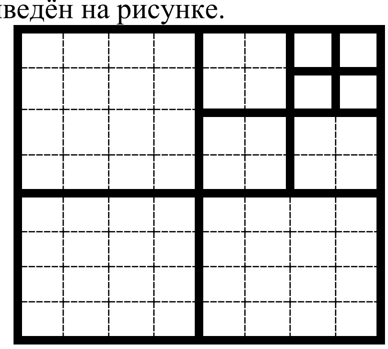
Ответ: нет, невозможно.

6. Клетчатый квадрат по линиям клеток разрезали на 10 квадратов. Среди них есть четыре квадратика 1 х 1, три квадрата 2 х 2 и два квадрата 4 х 4. Может ли суммарная длина всех разрезов равняться 28?

Решение. Площадь исходного квадрата не меньше чем $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

В квадрат 7 х 7 два квадрата 4 х 4 не уместятся, поэтому напрашивается использование в качестве исходного квадрата 8 х 8.

Пример размещения квадратов приведён на рисунке.



Ответ: да, может.

7. Пин и Карыч по очереди пишут цифры со старшего разряда по порядку вплоть до младшего. С нуля начинать нельзя, остальные цифры могут быть произвольными. Если полученное в итоге число нацело делится на 11, то победителем считается тот, кто написал последнюю цифру. Кто и как выиграет при правильной игре, если всего должно быть написано 6 цифр? Первым ходит Пин.

Решение. Выиграет Карыч, если он будет каждым своим ходом повторять предшествующий ход Пина. В итоге получится шестизначное число, кратное 11.

8. Площадь любого треугольника равна половине произведения любой стороны треугольника на расстояние от третьей вершины треугольника до прямой, проходящей через выбранную сторону. Придумайте способ разделения треугольника одной линией на два равновеликих треугольника (равновеликие фигуры – это фигуры, имеющие одинаковую площадь).

Решение. Линия, проходящая через вершину треугольника и середину противолежащей стороны, делит треугольник на два равновеликих треугольника. Площадь каждого из полученных треугольников будет равна одной четверти произведения стороны треугольника на расстояние от третьей вершины треугольника до выбранной стороны.

Ответ: линия, проходящая через вершину треугольника и середину противолежащей стороны.

9. Уникум написал 2018 последовательных натуральных чисел и выбрал 2000 из них. Сумма выбранных чисел оказалась простым числом. Может ли так быть, что сумма остальных 18 чисел – тоже простое число? Простое число – это натуральное число, имеющее ровно два натуральных делителя.

Решение. Среди записанных Уникумом 2018 последовательных натуральных чисел 1009 четных и 1009 нечетных. Сумма записанных чисел нечетна. Все простые числа, кроме числа 2 нечетны. Уникум выбрал 2000 чисел, сумма которых равна простому числу, следовательно, нечетна. Тогда сумма невыбранных 18 чисел четна и больше 2, следовательно, не может быть простым числом.

Ответ: нет, не может.

10. В этом году Уникум познакомился с арифметическими действиями над дробными числами. И ему захотелось представить число 2018 (номер текущего года) как произведение нескольких чисел вида $1+\frac{1}{n}$, где *n* может быть любым натуральным числом. Уникум очень любит математику, и ему удалось добиться нужного результата. А Вы сумеете добиться нужного результата?

Решение. $2=1+\frac{1}{1}$, $3=2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)$, $4=3\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)$, $2018=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2017}\right)$.

Ответ: $2018=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2017}\right)$.

Примечание. Возможны и другие способы представления числа 2018 в требуемом виде.