

Матбои, четвертьфинал, 21.04.2018



1. Какое значение может принимать длина радиуса окружности, вписанной в данный треугольник? Если длины трёх медиан треугольника окажутся равны 1 см, 2 см и 4 см, соответственно.

2. Докажите, что $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2b(ba^2 - b + c + 1)$.

3. Докажите, что, если натуральное число n не делится на 2 и 5 (без остатка), то существует натуральное число k , делящееся на число n . Причем десятичная запись числа k состоит только из единиц.

4. Какие натуральные числа можно представить в виде суммы двух взаимно простых натуральных чисел не равных 1?

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Окружности ω_2 и ω_3 пересекаются в точках C и D . Окружности ω_1 и ω_3 пересекаются в точках E и F . Прямые AB и CD пересекаются в точке Q , лежащей вне данных окружностей. Какие значения может принимать длина отрезка QE , если $AB = a$, $AQ = b$, $EF = c$ ($b > a$)?

6. На Липецкий турнир по компьютерной игре "Warcraft III" было зарегистрировано пять команд по 10 участников в каждой команде. В каждом матче двух команд встречались 10 пар игроков из этих команд, причём самый сильный из одной команды играл с самым сильным из другой, второй – со вторым, и так далее (считается, что более сильный игрок всегда выигрывает у более слабого). Победительницей матча считалась команда, одержавшая хотя бы n побед ($n > 5$). Если обе команды не одержали победу, матч считался закончившимся в ничью. По итогам турнира оказалось, что команда, имеющая по результатам жеребьёвки, номер один, проиграла второй команде, вторая – третьей, третья – четвёртой, четвёртая – пятой, а пятая – первой. При каком максимальном n такое могло случиться?

7. Имеется набор из $k > 2$ пространственных векторов. Назовём вектор большим, если его длина не меньше длины суммы всех остальных векторов. Докажите, что, если все вектора большие, их сумма равна $\vec{0}$.

8. Имеется натуральное число. Его цифры записываются по одной на карточки. К полученному набору карточек можно дополнительно добавить карточки с нулями, также можно убрать из исходного набора все или некоторые карточки с нулями. Карточки делятся на две группы, и из карточек каждой группы некоторым образом составляется по числу. Числа складываются. Можно ли за 12 таких операций получить однозначное число?