

Матбои, финал, 6.05.2018



1. Дана таблица 2018×2018 с числами как показано на рисунке.

1	2	3	...	2017	2018
2018	1	2	...	2016	2017
2017	2018	1	...	2015	2016
...
3	4	5	...	1	2
2	3	4	...	2018	1

Разрешается некоторое количество раз поменять местами две строки или два столбца. Сколько различных таблиц можно получить таким образом?

2. Может ли число, состоящее из цифры 5 и некоторого количества нулей (например, 5000) быть суммой трёх кубов целых чисел?

3. Внутри выпуклого семиугольника отмечены три точки. Докажите, что найдётся шестиугольник с вершинами в вершинах семиугольника, содержащий их все.

4. Если записать подряд числа 2^{2018} и 5^{2018} , сколько цифр будет записано на доске?

5. 2018 бесконечные попарно непересекающиеся арифметические прогрессии вместе образуют всё множество натуральных чисел (разности прогрессий не равны нулю). Определите у скольких из этих прогрессий разность прогрессии не меньше первого члена прогрессии.

6. В окружности с центром O проведены две непересекающиеся хорды AB и CD . На отрезках AB и CD как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 , которые пересекаются в точках M и N . Точки M_1 и N_1 являются серединами отрезков MO и NO соответственно. Докажите, что отрезок M_1N_1 делит пополам отрезок, соединяющий центры окружностей ω_1 и ω_2 .

7. В пространстве расположены 2017 сфер, никакие две из них не могут иметь больше одной общей точки. Некоторые из сфер – красного цвета, а остальные – зеленого. Каждую точку касания красной и зеленой сферы покрасили в синий цвет.

а) Приведите пример такого расположения сфер, при котором синих точек будет не менее 4608 штук. Причем каждая сфера, используемая в конструкции, касается не менее чем 6 других сфер.

б) Если убрать условие минимальности касаний каждой сферы, то удастся ли получить такое расположение сфер, при котором синих точек будет не менее 5570 штук?

8. По направлению “Математика 10-11” центра “Стратегия” занимаются 12 человек. Среди любых девяти из них найдутся пятеро, которые дружат друг с другом. Докажите, что найдутся шестеро друзей. (Если Ваня дружит с Петей, а Вася с Ваней, Петя и Вася не обязательно друзья).