

Матбои, полуфинал Б, 5.05.2018



1. Имеется 2018 колец, каждое из которых соединено с каждым из остальных. Определите, какое минимальное количество колец надо разрезать, чтобы все кольца отделились друг от друга? Пример соединения двух колец приведен на рисунке.

2. Правильный многоугольник с $4n$ сторонами разбит на параллелограммы. Докажите, что среди них найдётся хотя бы n прямоугольников.

3. Сколькими способами можно рассадить 9 человек в три ряда по три кресла так, чтобы ни один человек не был ниже впереди сидящего? Подразумевается, что у всех 9 человек различный рост.

4. Две карты Липецкой области, одна с более мелким масштабом, наложены друг на друга так, что меньшая карта целиком лежит на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой сколь угодно малого диаметра так, чтобы на обеих картах была проколота одна и та же точка Липецкой области.

5. Есть квадрат $ABCD$, площадь которого больше 50, и точка K . $BK = KD = 2\sqrt{10}$, $KC = 2\sqrt{2}$. Найдите длину стороны квадрата, и выясните вне или внутри квадрата находится точка K .

6. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel CB$) вписана в окружность ω . В треугольники ABC и ABD вписаны окружности с центрами O и Q соответственно. P и R середины меньших из дуг BC и AD окружности ω соответственно. Докажите подобие треугольников BPO и ARQ .

7. Двое играют в игру, записывая в строку (слева направо) по очереди натуральные числа от 1 до 5 (на выбор). Всего у каждого есть n ходов. Если полученное число будет делиться на 9, выигрывает второй игрок, а если нет – первый. Кто выигрывает при $n = 20$? А при $n = 18$?

8. Учитель загадал три натуральных числа и сообщил Уникуму С. их сумму, а Уникуму П. – произведение. Затем Уникум С. сказал: “Если бы я знал, что твоё число больше, я бы смог отгадать загадку.” А Уникум П. ответил: “Моё число меньше, и я знаю числа учителя.” Какие числа загадал учитель? Подразумевается, что оба Уникума говорили правду.