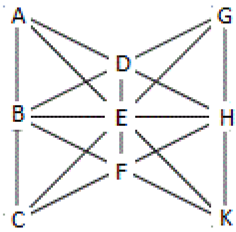
Матбои, полуфинал А, 5.05.2018

1. Правильный многоугольник с $4n$ сторонами разбит на параллелограммы. Докажите, что среди них найдётся хотя бы n прямоугольников.

2. Две карты Липецкой области, одна с более мелким масштабом, наложены друг на друга так, что меньшая карта целиком лежит на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой сколь угодно малого диаметра так, чтобы на обоих картах была проколота одна и та же точка Липецкой области.

3. 9 апельсинов лежат на столе, образуя 10 рядов по три апельсина (как на рисунке), причём в 9 рядах суммарный вес апельсинов одинаков, а в 10-м – отличается. За рубль можно взвесить несколько апельсинов один раз.



Какое минимальное количество рублей достаточно потратить, чтобы гарантированно узнать десятый ряд?

Чему равно максимальное количество различных по весу апельсинов?

4. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel CB$) вписана в окружность ω. В треугольники ABC и ABD вписаны окружностис центрами O и Q соответственно. P и R середины дуг BC и AD окружности ω соответственно, причем дуги BPC и ARD не имеют общих точек. Докажите подобие треугольников BPO и ARQ.

5. Двое играют в игру, записывая в строку (слева направо) по очереди натуральные числа от 1 до 5 (на выбор). Всего у каждого есть n ходов. Если полученное число будет делиться на 9, выигрывает второй игрок, а если нет – первый. Кто выигрывает при $n = 20$? А при $n = 18$?

6. Учитель загадал три натуральных числа и сообщил Уникуму С. их сумму, а Уникуму П. – произведение. Затем Уникум С. сказал: “Если бы я знал, что твоё число больше, я бы смог отгадать загадку.” А Уникум П. ответил: “Моё число меньше, и я знаю числа учителя.” Какие числа загадал учитель? Подразумевается, что оба Уникума говорили правду.

7. В прямоугольнике размером 2018 x 100 лежат 2001 точка, причем никакие три из них не лежат на оной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках с площадью меньше 101.

8. В тридевятом царстве есть n городов и m авиалиний, соединяющих по два города (между двумя городами не более одной авиалинии), причём $m \geq n + 1$. Традиционно все самолёты, летающие между двумя городами, красят или в белый, или в красный цвета. Время от времени, когда в каком-либо городе проходит крупное событие, краска обновляется, и белые самолёты летающие из этого города и в этот красятся в красный, а красные в белый. За каждой авиалинией закреплён ровно один самолёт. При каких n и m существует такой порядок крупных событий (перекрашиваний), что при любой первоначальной раскраске самолётов, все самолёты могут оказаться одного цвета?