

## Матбои-2017, 22.04.2017, финал

1. У правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  каждое боковое ребро имеет длину 2 метра, а каждое ребро оснований имеет длину 1 метр. Муравей хочет посетить все вершины призмы, начав свой путь из вершины  $A$  и завершив его в вершине  $D_1$ . Какой минимальный путь потребуется преодолеть муравью, если он может двигаться только по рёбрам призмы и диагоналям её граней? Основания призмы  $ABCDEF$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ .

2. В тридевятом царстве живут только 1000 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 1000 лжецов, которые всегда лгут. Однажды утром 1000 из них сказали: “Все мои друзья – рыцари!”, а 1000 других: “Все мои друзья – лжецы”. Каким может быть минимальное количество пар друзей, где один друг рыцарь, а другой лжец, если у каждого жителя царства есть хотя бы один друг?

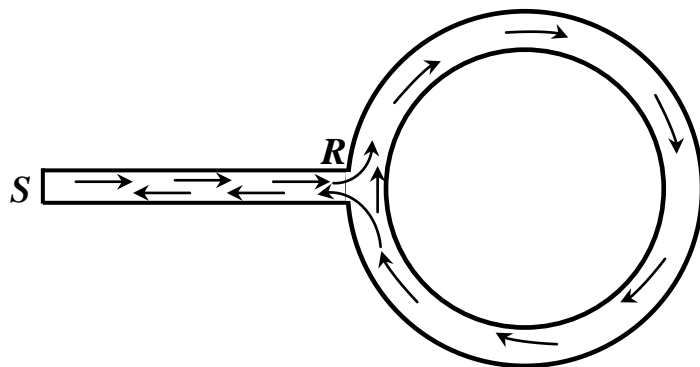
3. Произведение всех членов убывающей последовательности положительных чисел  $x_1, x_2, x_3, x_4$  равно 1. Найдите наименьшее значение выражения  $x_1 \cdot 2^{2x_2} + x_2 \cdot 2^{\frac{x_4}{2}} + x_3 \cdot 2^{-2x_1} + x_4 \cdot 2^{-\frac{x_3}{2}}$ .

4. У должника есть золотая цепь из 150 колец (два крайних кольца цепи не соединены между собой). Он знает, что ростовщик может в любой момент попросить золото любого веса от 1 до 150 граммов (целое число граммов), как часть уплаты долга. Какое минимальное количество звеньев ему нужно расковать, чтобы он сразу мог расплатиться в любом возможном случае? Одно кольцо весит 1 грамм.

5. Робот движется по сетке  $99 \times 99$  метров и должен собрать 100 шариков разбросанных в узлах сетки (клетки сетки имеют размер  $1 \times 1$  м). Сможет ли он сделать это за не более чем 2017 движений между узлами, если в начале он находится в углу сетки.

6. Точка  $Q$  – центр окружности вписанной в треугольник  $ABC$ . Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , пересекают описанную около него окружность в точках  $E$  и  $D$ . Прямая  $DE$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $F$ , а прямую  $BC$  в точке  $G$ . Докажите, что в четырехугольник  $BGQF$  можно вписать окружность.

7. Велосипедная трасса имеет вид, показанный на рисунке. Двигаться по ней можно только в направлении указанном стрелками. Путь по кругу занимает 1 минуту, а путь от  $S$  до  $R$  или обратно 30 секунд. Сергей ездил по этой трассе 15 минут, стартовав в  $S$  и закончив путь в этой точке. Определите количество различных возможных маршрутов Сергея.



8. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются внутренним образом в точке  $E$ . Хорды  $BK$  и  $BM$  окружности  $\omega_2$  касаются окружности  $\omega_1$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Точки  $Q$  и  $P$  – соответственно середины дуг  $KB$  и  $MB$ , не содержащих точку  $E$ . Точка  $B_1$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $PB_1 \parallel BQ$ , докажите, что четырехугольники  $B_1 A Q B$  и  $B_1 C P B$  являются вписанными.



## Матбои-2017, 22.04.2017, финал

1. У правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  каждое боковое ребро имеет длину 2 метра, а каждое ребро оснований имеет длину 1 метр. Муравей хочет посетить все вершины призмы, начав свой путь из вершины  $A$  и завершив его в вершине  $D_1$ . Какой минимальный путь потребуется преодолеть муравью, если он может двигаться только по рёбрам призмы и диагоналям её граней? Основания призмы  $ABCDEF$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ .

2. В тридевятом царстве живут только 1000 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 1000 лжецов, которые всегда лгут. Однажды утром 1000 из них сказали: “Все мои друзья – рыцари!”, а 1000 других: “Все мои друзья – лжецы”. Каким может быть минимальное количество пар друзей, где один друг рыцарь, а другой лжец, если у каждого жителя царства есть хотя бы один друг?

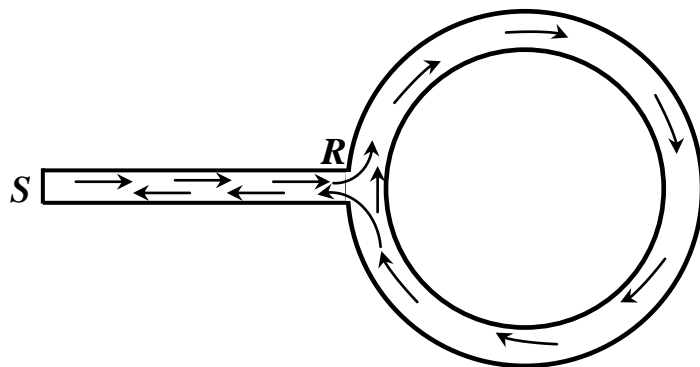
3. Произведение всех членов неубывающей последовательности положительных чисел  $x_1, x_2, x_3, x_4$  равно 1. Найдите наименьшее значение выражения  $x_1 \cdot 2^{2x_2} + x_2 \cdot 2^{\frac{x_4}{2}} + x_3 \cdot 2^{-2x_1} + x_4 \cdot 2^{\frac{-x_3}{2}}$ .

4. У должника есть золотая цепь из 150 колец (два крайних кольца цепи не соединены между собой). Он знает, что ростовщик может в любой момент попросить золото любого веса от 1 до 150 граммов (целое число граммов), как часть уплаты долга. Какое минимальное количество звеньев ему нужно расковать, чтобы он сразу мог расплатиться в любом возможном случае? Одно кольцо весит 1 грамм.

5. Робот движется по сетке  $99 \times 99$  метров и должен собрать 100 шариков разбросанных в узлах сетки (клетки сетки имеют размер  $1 \times 1$  м). Сможет ли он сделать это за не более чем 2017 движений между узлами, если в начале он находится в углу сетки.

6. Точка  $Q$  – центр окружности вписанной в треугольник  $ABC$ . Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , пересекают описанную около него окружность в точках  $E$  и  $D$ . Прямая  $DE$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $F$ , а прямую  $BC$  в точке  $G$ . Докажите, что в четырехугольник  $BGQF$  можно вписать окружность.

7. Велосипедная трасса имеет вид, показанный на рисунке. Двигаться по ней можно только в направлении указанном стрелками. Путь по кругу занимает 1 минуту, а путь от  $S$  до  $R$  или обратно 30 секунд. Сергей ездил по этой трассе 15 минут, стартовав в  $S$  и закончив путь в этой точке. Определите количество различных возможных маршрутов Сергея.



8. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются внутренним образом в точке  $E$ . Хорды  $BK$  и  $BM$  окружности  $\omega_2$  касаются окружности  $\omega_1$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Точки  $Q$  и  $P$  – соответственно середины дуг  $KB$  и  $MB$ , не содержащих точку  $E$ . Точка  $B_1$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $PB_1 \parallel BQ$ , докажите, что четырехугольники  $B_1 A Q B$  и  $B_1 C P B$  являются вписанными.

